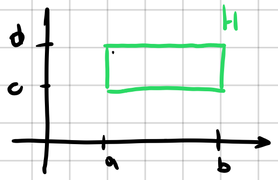
INTEGRALES DOBLES

⇒ Origen definición



si tengo este rectángulo, el área podría ser la sumatoria de áreas más pequeñas.

lo puedo definir como $[a,b] \times [c,d]$ un producto cartesiano

y los rectángulos más pequeños los puedo definir como ↓ además

$x_i \in [a,b] \ \forall i$
$y_j \in [c,d] \ \forall j$

$$\boxed{A(H_{ij}) = \Delta x_i \Delta y_j \ , \quad 1 \leq i \leq n \quad 1 \leq j \leq m . \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1} \ , \ \Delta y = y_j - y_{j-1}}$$

ahora consideremos $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x,y) \, \Delta x_i \, \Delta y_j$. básicamente estoy haciendo

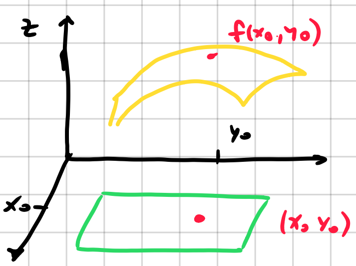
sumatoria de todos los rectángulos pequeños

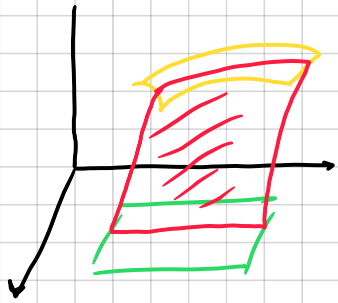
multiplicado por una función escalar aplicada en ese punto

para aplicar mejor la multiplicación en ese punto, entonces $\Delta x_i \to 0$ y $\Delta y_j \to 0$

por lo que $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x,y) \, \Delta x_i \, \Delta y_j = \iint_H f(x,y) \, dx \, dy \longrightarrow$ mejor ajuste infinitesimal

⇒ Interpretación gráfica





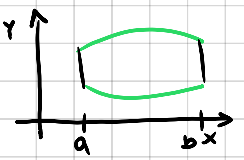
→ cuando tengo $\int_c^d f(x,y)\, dy$ estoy considerando una variable x_0 fija

y calculando el área variando "y".

lo mismo aplica viceversa variando "x" fijando "y"

⇒ tipos de regiones

• tipo 1 (x fijo)



$$\int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\, dy \, dx$$

• tipo 2 (y fijo)

$$\int_c^d \int_{x(y)}^{x(y)} f(x,y)\, dx \, dy$$

⇒ aplicaciones

↳ cálculo del volumen entre superficie $f(x,y)$ y dominio $D \in H$

↳ cálculo de masa total (física)
↓
Si cambio $f(x,y)$ por $\delta(x,y)$, densidad en cada punto

↳ densidad media $= \frac{1}{\text{area}(D)} \cdot$ masa total

↳ si $f(x,y) = 1$, entonces

$$\iint dx \, dy = \text{área}(D)$$

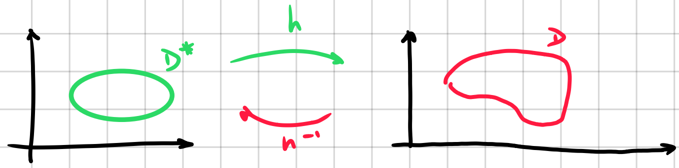
centro de masa

$$x_G = \frac{\iint_D x \, \delta(x,y) \, dy \, dx}{\iint_D \delta(x,y) \, dy \, dx} \ . \quad y_G = \frac{\iint_D y \, \delta(x,y) \, dx \, dy}{\iint_D \delta(x,y) \, dx \, dy}$$

⇒ Cambio de variables

Sirve cambiar de varable si tenemos que integrar algo feo $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

$$(x,y) = (x(\mu,v),\ y(\mu,v)) = \vec{h}(\mu,v)$$



Condiciones

① f integrable en D

② $\vec{h} \in C^1$ conjunto que incluye D^*

③ $J(\mu,v) \neq 0 \rightarrow \det(h(\mu,v)) \neq 0$

$$\begin{vmatrix} x_\mu' & x_v' \\ y_\mu' & y_v' \end{vmatrix} \neq 0$$

④ existe h^{-1} /

$$h^{-1}(D) \rightarrow D^*$$

Si se cumplen las 4 condiciones

entonces

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(x(\mu,v),\ y(\mu,v))\ |J(\mu,v)|\ d\mu\, dv$$

↳ la $|J(\mu,v)|$ surge por límite de la expresión pero podemos entender como la "escala" de la transformación de un espacio a otro

↳ se demuestra con $f(x,y)=1$

$$\text{area}(D) = |J(\mu,v)|\ \underbrace{\text{area}(D^*)}_{\iint_{D^*} |J(\mu,v)|\, d\mu\, dv}$$

⇒ Transformación lineal

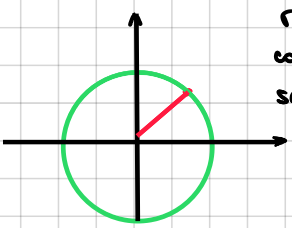
$$(x,y) = h(\mu,v) = (a\mu+bv,\ c\mu+dv)$$

$$J(\mu,v) = \begin{vmatrix} x_\mu' & x_v' \\ y_\mu' & y_v' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb \neq 0$$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(a\mu+bv,\ c\mu+dv)\ |ad-bc|\ d\mu\, dv$$

⇒ Coordenada polar

$$\vec{h}(r,\theta) = (r\cos(\theta),\ r\,\text{sen}(\theta)) = (x,y)$$



$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\cos(\theta) = \frac{x}{r} \rightarrow x = r\cos(\theta)$$

$$\text{sen}(\theta) = \frac{y}{r} \rightarrow y = r\cos(\theta)$$

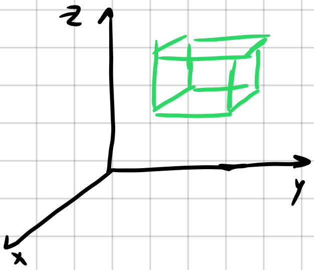
$$J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\,\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r$$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(r\cos\theta,\ r\,\text{sen}(\theta))\ r\ dr\ d\theta$$

6/6

Integrales triples

* Definición



Tengo un conjunto de puntos H que forman un cuerpo en el espacio

puedo definir los ejes en conjuntos más pequeños

+ con los ejes partidos pequeños puedo ir armando

paralelepípedos pequeños

$$H_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k] \;, \quad \begin{cases} 1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m \\ 1 \le k \le l \end{cases}$$

$$\mathrm{Vol}\,(H_{ijk}) = \Delta x_i \, \Delta y_j \, \Delta z_k$$

↳ para calcular volumen total del cuerpo es sumar todos los paralelepípedos pequeños

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{l} f(\alpha_i, \beta_j, \gamma_k)\, \Delta x_i \, \Delta y_j \, \Delta z_k = \iiint_H f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

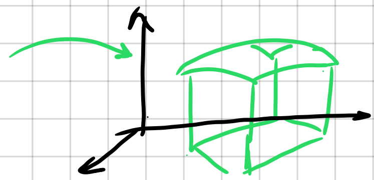
↳ observación: con integrales dobles estoy calculando volumen de cuerpos

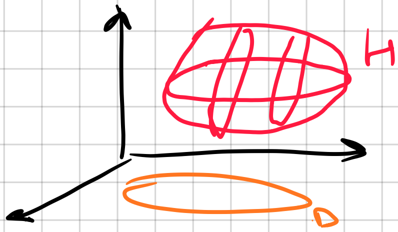
pero con integrales triples puedo calcular volúmenes

pero de cuerpos en el espacio

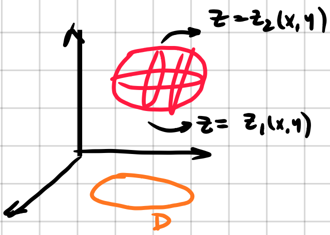
↳ "Desprender" del plano xy y definir forma

↳ con int dobles se calculan prop de obj planos y triples se usan para cuerpos





* fórmula región tipo 1



$$\iiint_H f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_{z_1}^{z_2} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy$$

↳ resolución de ejercicio:
- hallar lím de integración z
- Hallar trasposición región D
- Integrar triple

⇒ Algunas definiciones

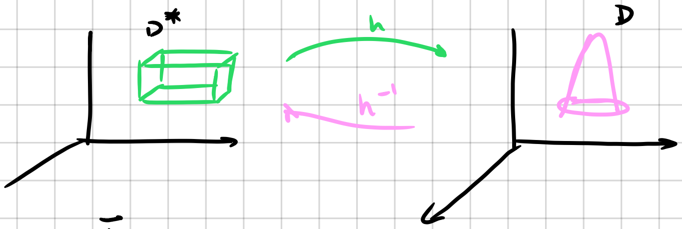
- $\mathrm{volumen}(H) = \iiint_H dx\,dy\,dz$
- $\mathrm{Masa}(D) = \iiint_D \delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$
- $f_{med} = \dfrac{1}{\mathrm{vol}(D)} \iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$
- Centro de masa

$$x_G = \frac{\iiint_D x\,\delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_D \delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}$$

$$y_G = \frac{\iiint_D y\,\delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_D \delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}$$

$$z_G = \frac{\iiint_D z\,\delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_D \delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}$$

⇒ Cambio de variables integrales triples



$(x,y,z) = \vec{h}(u,v,w)$

Requisitos

ⓐ f integrable en D

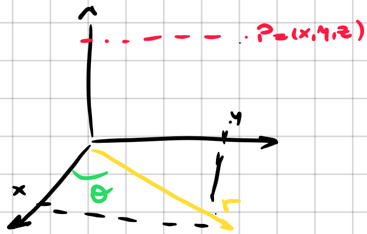
ⓑ $\vec{h} \in C^1$ en conj abierto que incluye a D^*

ⓒ $J(u,v,w) \neq 0 \quad \forall (u,v,w) \in D^*$

ⓓ $\exists\, h^{-1} \ / \ \forall (x,y,z) \in D, \ h^{-1}(x,y,z) = (u,v,w)$

$$\iiint_D f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{D^*} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\, |J(u,v,w)|\, du\, dv\, dw$$

- **Coordenadas cilíndricas**

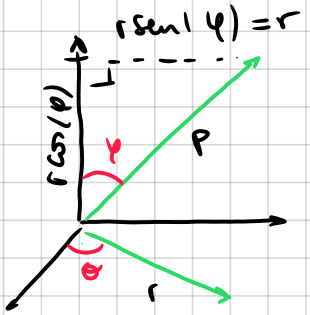


$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\,\text{sen}(\theta) \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 \le r < \infty \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ z \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

$$(x,y,z) = \vec{h}(r,\theta,z) \qquad J(r,\theta,z) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\,\text{sen}(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

$$\iiint_D f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{D^*} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, z)\, r\, dr\, d\theta\, dz$$

- **Coordenadas esféricas**



$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) = \rho\,\text{sen}(\varphi)\cos(\theta) \\ y = r\,\text{sen}(\theta) = \rho\,\text{sen}(\varphi)\,\text{sen}(\theta) \\ z = \rho\cos(\varphi) \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 \le \rho < \infty \\ 0 \le \theta < 2\pi \\ 0 \le \varphi \le \pi \end{matrix}$$

$$(x,y,z) = \vec{h}(\rho,\varphi,\theta)$$

$$J(\rho,\varphi,\theta) = \rho^2\,\text{sen}(\varphi)$$