|20/05/25|

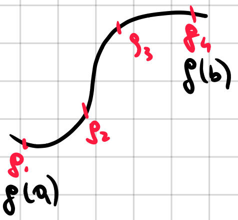
Resumen Guía 6

* Curva Suave

Dado curva C $\bar{x} = \bar{g}(t)$, $t \in I$.

C es suave si $g \in C^1$ y $g'(t) \neq 0$

* Longitud De curva



divido la curva en poligonal y las voy sumando → Divido I en varias partes ↓ $I = [a,b]$

$$\sum_{i=1}^{n} \| g(t-1) - g(t) \| \cong \leq \text{Long}(c)$$

⇓

Teorema

$$\text{Long}(c) = \int_a^b \underbrace{\|g'(t)\|}\, dt$$

→ $g'(t)$ es muy parecido a $g(t) - g(t-1)$ y más preciso → sum infinita de vec tg

→ Interpretación física: $\|g'(t)\|$ es rapidez de una partícula, si yo integro la rapidez obtengo desplazamiento

↓

* Absisa curvilinea

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|g'(t)\|\, dt$$

básicamente variar la longitud de la curva con una función que varíe el punto inicial y el punto final

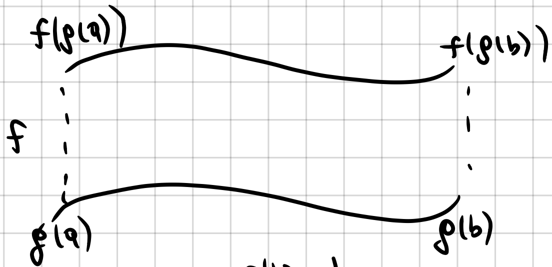
↳ OBS

$\Rightarrow s(t_0) = \int_{t_0}^{t_0} \|g'(t)\|\, dt = 0$ → longitud de un punto de la curva a sí misma

$\Rightarrow ds = \| g'(t)\, dt \|$

una noción importante es que si compongo con una función escalar (f) con la curva, puedo variar el dom f con s

↓ es decir que s es "absisa curvilinea de f"



→ $s(b) = \text{Long}$.

* Integral de línea

→ $\oint_c f\, ds$

Básicamente calcular el área entre curva C y $(f \circ g)(t)$

$$\int_c f(s)\, ds = \int_a^b f(g(t)) \underbrace{\|g'(t)\|}_{\text{derivada de una composicion de función}} \cdot dt$$

parecido ↓

$\int f(x)\, dx$ → Caso particular eje x

Obs:

→ si $f = 1$, $\int_c 1\, ds = \int_a^b \|\bar{g}'(t)\|\, dt = \text{Long}(c)$

→ suponer que f es densidad δ longitudinal de masa, la masa del alambre

$$M = \int_c f\, ds.$$

→ Valor medio $f = \int f\, ds \cdot \frac{1}{\text{Long}(c)}$

* Reparametrización de Curvas

si tengo curva C param $\bar{x} = \bar{g}(t)$. $t \in [a, b]$,

una forma rápida de reparametrizar es $g(k\mu)$, $\mu \in [\frac{a}{k}, \frac{b}{k}]$ y $k \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{si } k < 0}$ → cambia dirección

si $\boxed{0 < |k| < 1}$ → ralentiza recorrido

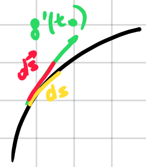
$\boxed{|k| = 1}$ → no hace nada

$\boxed{k > 1}$ → aumenta velocidad de recorrer curva → aumenta rapidez (física)

21/5

---

* Diferencial vectorial long de arco



$s = \int_{t_0}^{t} \|g'(t)\| dt$

$ds = \|g'(t)\| dt$

$d\vec{s} = ds\,\vec{T}$ ← versor tg

$d\vec{s} = \|g'(t)\| dt \cdot \frac{g'(t)}{\|g'(t)\|}$

$d\vec{s} = g'(t)\,dt$

básicamente $d\vec{s}$ es un vector tg pequeño que apunta a crec.

* Integral línea de campos vectoriales

$\vec{F} : H \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\int_C \vec{F}\, d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}(\vec{g}(t)) \cdot \vec{g}'(t)\,dt$$

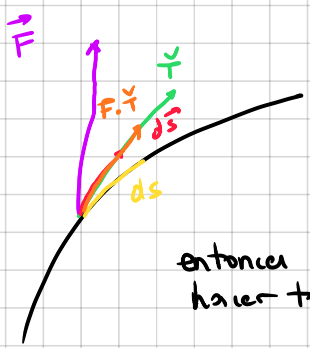
(producto escalar)

" Circulación de $\vec{F}$ sobre curva C $(\vec{g}(t))$ "

↓

FÍSICAMENTE Representa el trabajo que realiza el campo $\vec{F}$ al mover una partícula de $\vec{g}(a)$ a $\vec{g}(b)$ por C

→ gráficamente $\vec{F}$ es un "campo de fuerza" y C es una trayectoria de (por ej. una partícula) y la Integral representar cuánta fuerza realiza un campo para mover de "a" hasta "b" sobre la curva (yendo sobre la curva)



$\vec{F} \cdot \vec{T}$ tienen misma dirección que $d\vec{s}$ por lo que esta yendo la partícula

↓

entonces la partícula no necesita hacer tanta fuerza

$$\left[\int_a^b \vec{F}(\vec{g}(t)) \cdot \vec{g}'(t)\,dt = \int_a^b \vec{F}(\vec{g}(t))\,\vec{T}\,ds\right]$$

→ es la componente tangencial del campo $\vec{F}$

---

* Propiedades integrales

$\int_{AB} f\,ds = \int_{BA} f\,ds$ → ejemplo densidad alambre

↳ Integral de línea escalar: la parametrización no afecta resultado de integral

↳ Integral de línea vectorial: parametrización afecta resultado

↓

Incluye dirección

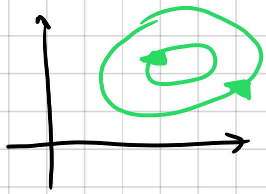
$$\int_{AB} F\,ds = -\int_{BA} F\,ds$$

* Sentido de circulación

$\oint_C \vec{F}\, d\vec{s}$ → denota curva C cerrada que es frontera de un dominio D (∂D)

- Si sentido de recorrido deja D a izquierda → recorrido positivo

$\oint_{\partial D^+} \vec{F} \cdot d\vec{s}$



$\partial D = C_1 \cup C_2$

* Líneas de campo

Sea $\vec{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ campo vectorial continuo

Línea de ec $\vec{x} = \vec{\rho}(t)$, $\vec{\rho}: I \to \mathbb{R}^n$ con $\vec{\rho}\,'(t) \neq 0$

es una línea de campo de $\vec{F}$ si $\vec{F}(\vec{\rho}(t)) = \vec{\rho}\,'(t)$ / básicamente que su recorrido tenga misma dirección que el campo de fuerza / producto vect máximo y obtiene mayor "propulsión"

Ejemplo $(n=2)$

$\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ $\qquad \vec{F}(\vec{\rho}(t)) = \vec{\rho}\,'(t)$

$(P(x(t), y(t)), Q(x(t), y(t))) = (x'(t), y'(t)) \Rightarrow \begin{cases} P(x(t), y(t)) = \dfrac{dx}{dt} \\ Q(x(t), y(t)) = \dfrac{dy}{dt} \end{cases} \rightarrow \dfrac{dx}{P(x,y)} = \dfrac{dy}{Q(x,y)}$

↳ Interpretación física: trayectoria

* Función potencial   Campos de gradiente

$F: H \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ es campo de gradiente si existe $\phi: H \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ / $\vec{F} = \nabla\phi$

↳ si $\vec{F} = \nabla\phi$, entonces ϕ es potencial de F

* Independencia del camino en integral de línea de campo vectorial

Teorema → si $F: H \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\vec{F} = \nabla\phi$ en todo punto H

entonces la circulación de $\vec{F}$ desde A hasta B a lo largo de cualquier curva suave $C \subset H$

no depende de la curva que se utilice

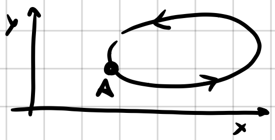
$$\underbrace{\int_{C_{AB}} \vec{F}\, d\vec{s} = \phi(\vec{B}) - \phi(\vec{A})}$$

↳ $\int_a^b \nabla\phi(\vec{\rho}(t))\, \vec{\rho}\,'(t)\, dt = \phi(\vec{\rho}(t))\Big|_a^b$

donde $\vec{\rho}(a) = \vec{A}$
$\vec{\rho}(b) = \vec{B}$

Consecuencia de teorema

$$\oint_C \vec{F}\,d\vec{s} = \phi(A) - \phi(A) = 0$$



la integral sobre cualquier curva cerrada es 0

si $\phi(\vec{B}) = \phi(\vec{A})$

entonces $\int_{AB} \vec{F}\cdot ds = \phi(B) - \phi(A) = 0$

$\vec{A}$ y $\vec{B}$ son puntos distintos pero son del conjunto equipotenciales
conjunto 0 de ϕ

* Campos conservativos (física)

Si $\vec{F}$ conjunto de fuerzas y $\vec{F} = \nabla\phi$

$\vec{F}$ es un campo conservativo $\longrightarrow$ recordar "fuerzas conservativas y fuerzas no conservativas"

El trabajo de campo cons es. nulo en cualquier curva cerrada y entre puntos de igual potencial

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{s} = 0$$

$$\int_{C_1} \vec{F}\,d\vec{s} = \int_{C_2} \vec{F}\,d\vec{s}$$

* Condición necesaria para que F sea campo de gradiente

↳ la matriz jacobiana tiene que ser simétrica

⇒ Demostración $\boxed{n=2}$

$$\vec{F}(x,y) = (\phi'_x(x,y), \phi_y(x,y)) = (P(x,y), Q(x,y))$$

$$DF = \begin{pmatrix} \phi''_{xx} & \phi''_{xy} \\ \phi''_{yx} & \phi''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P'_x & P'_y \\ Q'_x & Q'_y \end{pmatrix},$$ si $\phi''_{yx} = \phi''_{xy}$ entonces matriz es simétrica.

ϕ es C^2 y $\nabla\phi$ es $C^1 \rightarrow F$ es C^1

* condición suficiente campo de gradiente

∃ $D\vec{F}$ continua y simétrica en conjunto H abierto y simplemente conexo entonces existe
$\vec{F} = H \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

sin agujeros en medio

$\phi = H \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \,/\, \nabla\phi = F$