

Supongamos que $\frac{dG_1, G_2}{df_1, z}(P) \neq 0 \rightarrow \begin{cases} y = f_1(x) \\ z = f_2(x) \end{cases}$

Una parametrización de C es $\vec{\rho}(x) = (x, f_1(x), f_2(x))$.
 $f_1, f_2 \in C^1(\mathbb{R})$.

$$\vec{\rho}'(x) = (1, f_1'(x), f_2'(x)) \neq 0$$

$$\vec{\rho}'(x) \rightarrow \left(1, \frac{-\frac{dG_1, G_2}{df_1, z}}{df_1} \right)$$

$\nabla G_1(P) \cdot x \nabla G_2(P)$

30/4

Polinomio de Taylor

$f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si f tiene derivadas continuas hasta orden N

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$\hookrightarrow$ si f tiene derivadas continuas hasta orden $n+1$ en $\mathbb{R}(x_0)$ en

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

* Fórmula de Taylor de primer orden

Teorema. Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($n > 1$) abierto, $A \in D$ y f clase C^1 en $E(A)$

$A = (a_1, \dots, a_n)$ entonces

$$f(x) = f(A) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(A)(x_i - a_i) + R_n$$

Taylor orden $n=1$

si $n=2$

$$p_1(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y-y_0)$$

$$= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)[(x-x_0, y-y_0)]$$

xito

* Fórmula Taylor Segundo orden.

Teorema = Sean $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, D abierto, $A \in D$ y f clase C^2 en $E(A)$ con $A = (a_1, \dots, a_n)$.

entonces

$$f(x) = f(A) + \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(A)(x_i - a_i)}_{\text{ord 1}} + \underbrace{\frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A)(x_i - a_i)(x_j - a_j)}_{\text{ord 2}} + R_2$$

$\forall x \in E(A)$

Si $n=2$

$$p_2(x, y) = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \right]$$

clase C^2

$$= f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)(y - y_0)^2$$

El polinomio de Taylor de orden k en punto A nos da una buena aproximación de f para puntos cercanos al punto A .

y f clase C^k en $E(A)$

o Propiedades: Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(n \geq 1)$, D abierto, $A \in D$

Si P_k es polinomio Taylor ord. k en A , entonces

- $f(A) = P_k(A)$

$$\nabla f(A) = \nabla P_k(A)$$

- los derivadas sucesivas de f y P_k , hasta el orden k coinciden en punto A

Ejemplo

Sea una función f clase $C^3(\mathbb{R}^2)$ cuyo polinomio de Taylor
segundo orden en $A = (1, -1)$ es $p_2(x, y) = 2 - x + y^2 + xy + y^2$.

Hallar si es posible el plano tg a gráfica de f en $(1, -1, f(1, -1))$

Como $f \in C^3(\mathbb{R}^2)$ entonces f diferenciable en $\mathbb{R}^2$ en particular en A ,
por lo tanto f admite plano tg

por prop. $f(1, -1) = p_2(1, -1) = 1$.

una ec plano es $z = f(1, -1) + \nabla f(1, -1) \cdot (x-1, y+1)$

por prop. $\nabla f(1, -1) = \nabla p_2(1, -1) = (0, 0)$.

plano buscado es $\boxed{z=1}$.

* Extremos de campos escalares

• Extremos locales o relativos

Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y A un punto interior de D .

Decimos que: $\hookrightarrow f$ alcanza max relativo en A si $f(A) \geq f(x) \forall x \in U(A)$ ($f(A)$ es max rel)

$\hookrightarrow f$ alcanza min relativo en A si $f(A) \leq f(x) \forall x \in U(A)$ ($f(A)$ es min rel)

• EXTREMOS ABSOLUTOS

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $A \in D$. Decimos que ($f(A)$ max abs)

$\hookrightarrow f$ alcanza max absoluto en A si $f(A) \geq f(x) \forall x \in D$.

$\hookrightarrow f$ alcanza min absoluto en A si $f(A) \leq f(x) \forall x \in D$.

$f(A)$ min abs

otro truco hallar extremos

$\hookrightarrow$ puntos críticos

$\hookrightarrow$ derivadas

$\hookrightarrow$ gráfico.

$\hookrightarrow$ preguntarle a Dios

$\rightarrow$ mirar expr alg.
de función

★ Ejemplos.

① $f(x,y) = \underbrace{x^2 + y^2}_{\geq 0} + 4$

$\hookrightarrow f(0,0) = 4 \leq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

min. absoluto

② $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \text{min. en } (0,0)$

f alcanza min abs en (0,0)

⇒ Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, D abierto

• si f es diferenciable en $A \in D$ y $\nabla f(A) = 0$
el punto A se llama PUNTO ESTACIONARIO

• $A \in D$ es un pto crítico si es un punto estacionario
o al menos una derivada parcial no existe

de func. diferenciable

⇒ Condición necesaria para existencia de extremos ↑

↳ Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($n > 1$) D abierto. y $A \in D$. Si

f es diferenciable en A y $f(A)$ es extremo entonces $\nabla f(A) = 0$

condición
no suficiente

por ejemplo: $f(x,y) = x^2 - y^2 \quad A = (0,0)$

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \rightarrow \nabla f(0,0) = (0,0)$

probar que no es extremo $\rightarrow$ si fuera un max. (o extm)

entonces todos los puntos cerca de $(0,0) \rightarrow E(b,0)$

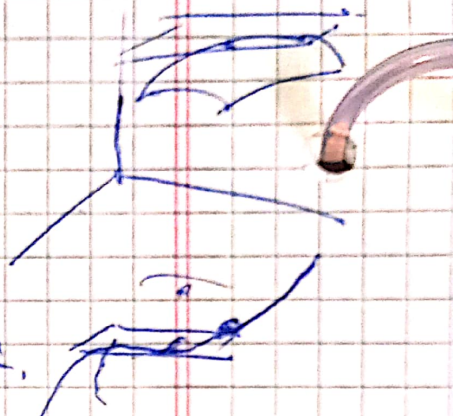
tienen que ser menores o mayores al mismo tiempo

$f(r,0) = r^2 \geq 0$
 $r \neq 0$

$f(0,r) = -r^2 < 0$
 $r \neq 0$

⇒ Un punto A donde $\nabla f(A) = \vec{0}$
pero no es extremo. se llama

Punto Silla o PUNTO DE ENSILLADURA.



Existencia de extremos locales para funciones dif.

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

matriz Hessiana

$f \in C^2$

$$H_f(A) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{bmatrix} \rightarrow \text{matriz hessiana es la matriz jacobiana de gradiente}$$

$$H_f(A) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial n} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial n^2} \end{bmatrix}$$

→ si $\det(H_f(A)) > 0$ y si:

↳ si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) > 0$ f alcanza mínimo relativo en A

↳ si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) < 0$ f alcanza máx rel en A.

→ si $\det(H_f(A)) < 0$, f(A) no es extremo relativo

⇒ si $\det(H_f(A)) = 0$, el extremo no decide

el determinante de matriz Hessiana no decide

o Ejemplo $f(x,y) = x^2 + y^4$

$\nabla f(x,y) = (2x, 4y^3)$

$$H_f = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$f(0,0) = 0$

$f(x,y) = x^2 + y^4 \geq 0 = f(0,0)$

f min local.

(ej 2)

$f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$

$\nabla f(x,y) = (6x^2 - 6y, -6x + 6y)$

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 12x & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} < 0$$

(0,0) no es extr.

$\begin{cases} 6x^2 - 6y = 0 \\ -6x + 6y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} P_1 = (0,0) \\ P_2 = (1,1) \end{matrix}$

→ puntos críticos

$$H_f(P_2) = \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} > 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 12$$

→ el punto silla
→ el min rel.

matriz Hessiana

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

mínimo
relativo
 $f(P)$

$$M_1 = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) \right]$$

Si $\det(H_f(P)) \neq 0$ y:

$$M_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\bullet \det(M_1) > 0 \quad \det(M_2) > 0 \quad \dots \quad \det(M_n) > 0$$

$$\bullet \det(M_1) < 0, \det(M_2) > 0, \dots$$

↪ máximo relativo f en P alternado

→ si no entran en ningún caso - $f(P)$ no es ~~máx~~ rel extrema

→ si $\det(H_f(P)) = 0$ → el criterio ~~no~~ decide

• Ejemplo $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - 2z$

$$\nabla f(x, y, z) = (2x - y, 2y - x, 2z - 2)$$

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2y - x = 0 \\ 2z - 2 = 0 \end{cases} \quad P = (0, 0, 1)$$

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$H_f(P)$

$$\det(H_f(P)) = 2 \cdot 3 = 6 > 0$$

$f(P)$ es un mínimo relativo de

f de valor $\underline{f(P) = -1}$