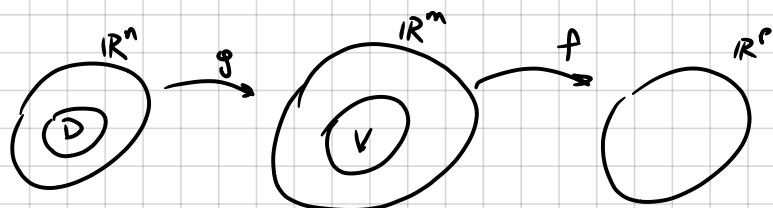


25/4

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

$$g: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$f: V \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$$

$h = f \circ g$ está definida si $\text{Im}(g)$ está contenida en dominio de $f \rightarrow \text{Im}(g) \subseteq V$

• Ejemplo

Sea $\tilde{g}(t) = (e^t, \ln(t))$, $f(x, y) = (xy, x^2)$

¿está definida $h = f \circ g$? $\left. \begin{array}{l} \text{Im}(g) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0\} \\ f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$ como $\text{Im}(g) \subseteq \text{Dom}(f)$, $h = f \circ g$

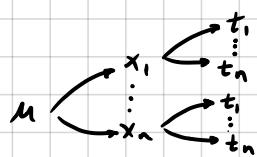
• Teorema $\rightarrow$ composición de funciones continuas es continua

Sea $g: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f: V \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p / \text{Im}(g) \subseteq \text{Dom}(f)$. Sea $A \in D_g$ y $g(A) \in D_f$

Si g es continua en A entonces f continua en $g(A)$. $f \circ g$ es continua en A

* Derivadas funciones continuas

La forma de la regla de la cadena para caso general de composición de funciones depende de cómo están relacionadas las variables



$$\frac{dM}{dt_i} = \frac{\partial M}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt_i} + \dots + \frac{\partial M}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt_i}$$

esto en un caso
normal sería $\mu = x_1 + \dots + x_n$
por eso la derivada es una suma
 $\downarrow$
 $M(x_1, \dots, x_n) = x_1(t_1, \dots, t_n) + \dots + x_n(t_1, \dots, t_n)$

• Ejemplo $f(x, y) = xy^2$ $\tilde{g}(t) = (e^{2t}, \cos(t) + t)$ $f \begin{matrix} x \rightarrow t \\ y \rightarrow t \end{matrix}$

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(t)) \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(t)) \frac{dy}{dt}(t)$$

 $\rightarrow$ Regla de la cadena 'forma matricial'

$$g: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ y } f: V \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p / \text{Im}(g) = V$$

$$A \in D^\circ \rightarrow g \text{ diferenciable en } A \text{ y } f \text{ diferenciable en } g(A) \rightarrow \text{entonces } D(f \circ g)(A) = D_f(g(A)) D_g(A)$$

(ejemplo anterior) $Df(x_0, y_0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(y_0, x_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right]$, con $(x_0, y_0) = g(t_0)$

$$Dg(t_0) = \begin{bmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{bmatrix}$$

$$D(f \circ g)(t_0) = D_{f|_{V \circ g}} \cdot D_g(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(t_0)) x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(t_0)) y'(t_0)$$

FUNCIONES DEFINIDAS FORMA IMPLÍCITA

Demostración

$$y = x^2 + 1 \quad \rightarrow \quad y = f(x) \quad \text{Forma explícita} \quad \checkmark$$

$$y - x^2 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad G(x, y) = 0 \quad \text{Forma implícita} \quad \checkmark$$

¿Dada $G(x, y)$ existe $f / y = f(x)$?

$$\frac{x^2 + y^2}{G(x, y)} = 1 \quad \rightarrow \quad y_1 = \sqrt{1 - x^2} \quad \vee \quad y_2 = -\sqrt{1 - x^2}$$

→ elijo y_1 o y_2 según lo que pueda enunciar

→ Decimos que ec. $G(x, \dots, x_n, y) = 0$ define implícitamente a "y" en función de $x, \dots, x_n$

en un conjunto $H \subseteq \mathbb{R}^n$ si existe una función escalar f tal que $G(x, \dots, x_n, f(x, \dots, x_n)) = 0 \quad \forall (x, \dots, x_n) \in H$

* Teorema función Implícita (TFI)

Sea $G = D \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ con D abierto $(x, \dots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$ y $P = (a, \dots, a_n, b) \in \mathbb{R}^{n+1}$

Si:

① $G(P) = 0$

② G es de clase C^1 en $E(P)$ → continua y derivable

③ $\frac{\partial G}{\partial y}(P) \neq 0$ → ya que quiero y en función de $x, \dots, x_n$

Entonces $G(x, \dots, x_n, y) = 0$ define única función f definida en $E(A)$ siendo $A = (a, \dots, a_n)$ tal que

① $f \in C^1$ en $E(A)$

② $f(a, \dots, a_n) = b$

③ $G(x, \dots, x_n, f(x, \dots, x_n)) = 0 \rightarrow \forall (x, \dots, x_n)$

Además las derivadas parciales de f se calculan como:

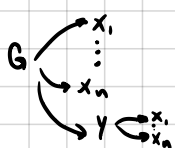
$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = - \left[\frac{\partial G}{\partial x_i}(x, \dots, x_n, y) \right] \cdot \frac{1}{\frac{\partial G}{\partial y}(x, \dots, x_n, y)} \Bigg|_{y=f(x, \dots, x_n)}$$

→ permite calcular derivadas parciales sin conocer función f

OBS • El teorema nos da condiciones suficientes para la existencia de f pero no nos dice de cómo conocer expresión de f y aún así se puede calcular derivadas parciales

• El teorema es local → la existencia está asegurada en $E(A)$

• La forma de cálculo de las derivadas parciales surge al aplicar regla de cadena



$$G(x, \dots, x_n, y) \quad y = f(x, \dots, x_n)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}(A) = \frac{\frac{\partial G}{\partial x_i}(P)}{-\frac{\partial G}{\partial y}(P)}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $\mathbb{R}^n$ $\mathbb{R}^{n+1}$

• Ejemplo de función implícita

$$2x^2 + \ln(xy) - 2y = 0$$

$$x(y+1) - z + 2yz^2 = 0 \rightarrow G(x, y, z)$$

* CURVA PLANA DADA EN FORMA IMPLÍCITA

¿Cuándo $G(x, y) = 0$ y $P = (x_0, y_0)$ la ec. definida en entorno de P es una curva?

- ① $G(P) = 0$
 - ② $G \in C^1(E(P))$
 - ③ $\nabla G(P) \neq \vec{0} \rightarrow$ existen derivadas parciales
- Entonces $G(x, y) = 0$ define una curva C que contiene punto P

OBS $\nabla G(P) = \left(\frac{\partial G}{\partial x}(P), \frac{\partial G}{\partial y}(P) \right) \neq \vec{0}$

$\rightarrow$ Si $\frac{\partial G}{\partial x}(P) \neq 0$ entonces queda definido $x = h(y)$

$\rightarrow$ Si $\frac{\partial G}{\partial y}(P) \neq 0$ entonces queda def. $y = f(x) = E(x_0)$

$\rightarrow$ en este caso $\vec{g}(x) = (x, f(x))$ una parametrización de C $x \in E(x_0)$

• $\vec{g}'(x_0) = (1, f'(x_0)) \neq \vec{0} \rightarrow P$ es un punto simple (por construcción de g) y regular (f clase C^1)

$$\vec{g}'(x_0) = (1, f'(x_0)) = \left(1, \frac{-\frac{\partial G}{\partial x}(P)}{\frac{\partial G}{\partial y}(P)} \right) = \left[\frac{1}{\frac{\partial G}{\partial y}(P)} \right] \left(\frac{\partial G}{\partial y}(P), -\frac{\partial G}{\partial x}(P) \right)$$

$\rightarrow$ vector ortogonal a $\nabla G(P) = \left(\frac{\partial G}{\partial x}(P), \frac{\partial G}{\partial y}(P) \right)$

$\rightarrow$ si necesito hallar recta tg,

entonces con buscar un vector ortogonal a gradiente

tengo vector direccional? $\rightarrow$ frases de la profe

29/4

* SUPERFICIES DADAS IMPLÍCITAS

$G(x, y, z) = 0$ y $P = (x_0, y_0, z_0)$

- ① $G(P) = 0$
 - ② $G \in C^1(E(P)) \rightarrow \nabla G$ continua en $E(P)$
 - ③ $\nabla G(P) = \left(\frac{\partial G}{\partial x}(P), \frac{\partial G}{\partial y}(P), \frac{\partial G}{\partial z}(P) \right) \neq \vec{0}$
- Entonces $G(x, y, z)$ define sup Σ que contiene P ,
recta $\vec{n}$, plano tg en P
una parametrización sería $\vec{F}(x, y) = (x, y, f(x, y))$

$$\vec{N}_0 = \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} = \left(-\frac{\partial F}{\partial x}, -\frac{\partial F}{\partial y}, 1 \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial x} & \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right) & \frac{\partial G}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \left(\frac{\partial G}{\partial z} \right) & \frac{\partial G}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\frac{\partial G}{\partial z}} \left(\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z} \right)$$

una ec plano tg: $\nabla G(P) \cdot (x - P) = 0$

$\rightarrow$ vector normal sup = $\nabla G(P)$

* Función definida forma implícita por sistema de ec

↳ caso particular: 2 ec, 3 var → el núm de ecuaciones es igual al máx de variables dep

$$\begin{cases} G_1(x, y, z) = 0 \\ G_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad \text{TEOREMA}$$

$$\text{Sea } G_1, G_2: D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \text{ con } D \text{ abierta} \quad P = (x_0, y_0, z_0)$$

$$(1) G_1(P) = 0 \quad G_2(P) = 0$$

$$(2) G_1, G_2 \in C^1(E(P))$$

$$(3) \frac{\partial(G_1, G_2)}{\partial(y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial y} & \frac{\partial G_1}{\partial z} \\ \frac{\partial G_2}{\partial y} & \frac{\partial G_2}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0$$

Entonces el sistema define implícitamente un

único sistema de funciones $\begin{cases} y = f_1(x) \\ z = f_2(x) \end{cases} \Rightarrow \text{Curva}$
definida en entorno $E(x_0)$

$$(1) f_1, f_2 \in C^1 \text{ en } E(x_0)$$

$$(2) y_0 = f_1(x_0) \quad z_0 = f_2(x_0)$$

$$(3) G_1(x_0, f_1(x_0), f_2(x_0)) = G_2(x_0, f_1(x_0), f_2(x_0)) = 0$$

Las derivadas f_1 y f_2 se pueden calcular

$$f'_1(x) = \left\{ \begin{vmatrix} -\frac{\partial G_1}{\partial x} & \frac{\partial G_1}{\partial z} \\ -\frac{\partial G_2}{\partial x} & \frac{\partial G_2}{\partial z} \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\frac{\partial(G_1, G_2)}{\partial(y, z)}} \right\} \quad \text{Surge de la regla de Cramer}$$

$$\begin{matrix} G_1, G_2 & \begin{cases} \xrightarrow{x} \\ \xrightarrow{y \rightarrow f_1(x)} \\ \xrightarrow{z \rightarrow f_2(x)} \end{cases} \end{matrix} \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} (G_1(x, y, z)) = \frac{\partial}{\partial x} (0) \\ \frac{\partial}{\partial x} (G_2(x, y, z)) = \frac{\partial}{\partial x} (0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial G_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{resolver sistema para hallar } \frac{\partial y}{\partial x} \text{ y } \frac{\partial z}{\partial x}$$

* Curvas definidas por sistema de ecuación (forma implícita)

Dada Σ_1 ec. $G_1 = 0$ y Σ_2 ec. $G_2 = 0$ y $P(x_0, y_0, z_0)$

$$(1) G_1(P) = 0 \quad G_2(P) = 0$$

$$(2) G_1, G_2 \in C^1 \text{ en } E(P)$$

$$(3) \nabla G_1(P) \times \nabla G_2(P) \neq 0$$

Hay normal
hallar $\nabla G_1(P) \times \nabla G_2(P)$
no nula y $\nabla G_1 \times \nabla G_2$

define curva C en punto P

↳ parametrización de $C \quad \vec{r}(x) = (x, f_1(x), f_2(x))$

$$\vec{r}'(x) = (1, \underbrace{f'_1(x), f'_2(x)}_{\frac{-\partial(G_1, G_2)}{\partial(y, z)}})$$

$$\underbrace{\frac{-\partial(G_1, G_2)}{\partial(y, z)}}_{\nabla G_1(P) \times \nabla G_2(P)}$$