1/4/2025

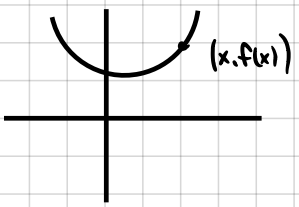
CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES

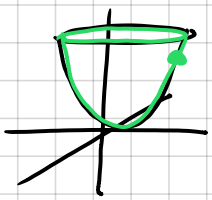
* Gráfica de una función escalar

- Sea $f = D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

La gráfica de una función escalar es: $G_f = \{(x_1 \dots x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1} / (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \wedge y = f(x_1 \dots x_n)\}$

↳ Cuando grafico, aumenta una dimensión más: ⟶ Agrego una var ⟶ imagen de la función





$f = D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$G_f \subseteq \mathbb{R}^3$

$\vec{x} = (x, y, f(x,y))$

* Conjunto de nivel

Sea $f = D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{R}$, el conjunto nivel k de f se define como $N_k(f) = L_k(f)$

$N_k = \{ x \in \mathbb{R}^n / x \in D \wedge f(x) = k \} \Rightarrow \{ x \in D / f(x) = k \}$

- Ejemplo: Hallar conjunto Nivel 0 de $f(x,y) = 4y - y^2 - yx^2$ ⟶ Dom $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

Entonces ⟶ $N_0 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \underset{y \neq 0}{4y - y^2 - yx^2 = 0} \}$

Se puede simplificar $\Rightarrow$ $4y - y^2 = y x^2 \Rightarrow x^2 = 4 - y \Rightarrow \boxed{y = 4 - x^2}$ una parábola

Reescribimos $N_0 f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \underset{y \neq 0}{y = 4 - x^2} \}$

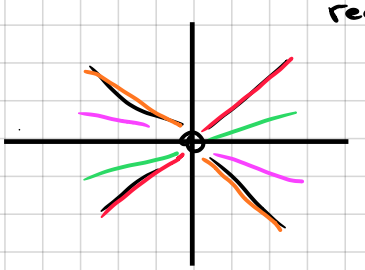
Gráfica de Conj nivel no es gráfica del campo escalar

- Ejemplo 2: Hallar conj nivel k $f(x,y) = y/x$

① $\Rightarrow$ Dom $= \mathbb{R}^2 - \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0\}$

② $\Rightarrow$ $N_k(f) = \{ (x,y) \in D / \frac{y}{x} = k \} \Rightarrow \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \underset{\downarrow}{y = kx} \wedge x \neq 0 \}$

rectas



* Límite funciones varias variables

Sea $f = D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n > 1$ y sea A un punto de acumulación (interior/frontera) de D

Definición formal

Decimos que $\lim_{x \to A} f(x) = L$ si $\forall B(L, \varepsilon)$ existe $B^*(A, \delta)$ / si $x \in D \cap B^*(A, \delta) \to f(x) \in B(L, \varepsilon)$

Si $\boxed{m > 1} \longrightarrow f(x) = (f_1(x) \dots f_m(x)) \to \lim_{x \to A} f(x) = L = (L_1 \dots L_m)$, donde $\lim_{x \to A} f_i(x) = L_i \quad \forall i \in [1, m]$

Ejemplo

- $\lim_{(x,y) \to (0,1)} \left[x^2 y + \cos(x)(y-2)^2 \right]$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,1)} \overset{\to 0}{(x^2 y)} + \lim_{(x,y)\to(0,1)} \overset{\to 1}{\cos(x)} \lim_{(x,y)\to(0,1)} \overset{\to 1}{[(y-2)^2]} = 0 + 1 = 1$$

- $\lim_{(x,y) \to (0,1)} \dfrac{x^2 (y-1)}{x^4 + (y-1)^2} \Rightarrow$ Indet $\frac{0}{0}$ $\longrightarrow$ No se puede simplificar con L'Hopital

para funciones de una sola variable

---

① PROBAR INEXISTENCIA DE LÍMITES POR CURVAS

↳ como el punto de tendencia es en $\mathbb{R}^2$ (en este caso) escojo hay infinitas formas de acercarme pero elijo una familia de curvas (rectas, parábolas) que pasen por el punto

↳ Este método sólo puede demostrar la inexistencia de un límite $\to$ No prueba la existencia de lim

Ejemplo

- fam rectas que pasan por $(0,1) \Rightarrow y = mx + 1$

  - Evaluar puntos cerca de recta $\quad f(x, mx+1) = \dfrac{x^2(mx+1-1)}{x^4 + (mx+1-1)} = \dfrac{x^2 m x}{x^4 + m^2 x^2} = \dfrac{x^2 x m}{x^2 (x^2 m^2)}$

  - Evaluar límite en puntos de recta cerca del punto $\quad \lim_{x \to 0} \dfrac{x^2 x m}{x^2 (x^2 + m^2)} = 0 \Rightarrow$ si acerco con rectas el lim existe y es 0

- fam parábolas que pasan por $y = mx^2 + 1$

  - Evaluar func en parábola $\quad f(x, mx^2+1) = \dfrac{x^2(mx^2+1-1)}{x^4 + (mx^2+1-1)^2} = \dfrac{x^2 m x^2}{x^4 + m^2 x^4}$

  - Ver límite en puntos de parábola cerca del punto $\quad \lim_{x \to 0} f(x, mx^2+1) = \lim_{x \to 0} \dfrac{x^2 m x^2}{x^4 + m^2 x^4} = \lim_{x \to 0} \dfrac{m}{1 + m^2}$

CONST $\in \mathbb{R}$

pero $m \geq 0$ y $m < 0$?

ambas parábolas dan un límite distinto $\leftarrow \begin{cases} f(x, x^2+1) = \frac{1}{2} \\ f(x, -x^2+1) = -\frac{1}{2} \end{cases}$ dan lím distintos $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$

Si el límite existe es único $\longleftarrow$

* FUNCIONES ACOTADAS ⇒ sirve para calcular límites de forma 0×acotado

(En gral) Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ decimos que f es acotada si $\exists M \in \mathbb{R} \wedge M > 0$ tal que $\|f(x)\| \leq M \ \forall x \in \mathbb{R}$

y sea $S \subset D$ Decimos que f es acotada en S si existe $M > 0$ tal que $\|f(x)\| \leq M \ \forall x \in S$

- Ejemplo $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$ ⇒ acotada en toda bola reducida en $(0,0)$

$x^2 \leq x^2 \Rightarrow x^2 \leq x^2+y^2 \geq 0 \wedge (x,y) \neq (0,0) \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1 \Rightarrow \left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{1}{M}$

por lo tanto f es acotada $\overset{*}{B}(r, (0,0))$

⇒ En general si m y p son pares, $f(x,y) = \frac{x^m}{x^m+y^p}$, $g(x,y) = \frac{y^p}{x^m+y^p}$ son f acotadas en toda bola abierta red con $c=(0,0)$

- Ej. $\lim_{x \to (0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^6} = \lim_{x,y \to (0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^6} \cdot x^2 = 0$ (acotada · $x^2 \to 0$) $\quad \exists \lim_{x,y \to 0,0} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$

* Límite de campos vectoriales ⟶ se calc misma forma

- $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \left(\underbrace{\frac{x \cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{f_1}, \underbrace{e^{x+y}}_{f_2} \right)$ $\quad$ - $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \left(\lim_{(x,y) \to 0,0} f_1, \lim_{(x,y) \to (0,0)} f_2 \right) = (0,1)$

- $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f_2(x,y) = \lim_{(x,y) \to (0,0)} e^{x+y} = 1$

demo acotada $x^2 \leq x^2+y^2 \Rightarrow \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1 \Rightarrow \left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq 1$

- $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f_1(x,y) = \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \to (0,0)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) y = 0$ ($y \to 0$; $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ acotada; $\sqrt{x^2+y^2} \to 0$)

* Continuidad de campos (escalar y vectorial)

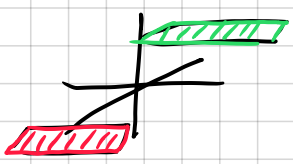
Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con D abierto y $A \in D$ punto de acumulación,

decimos que f continua en A si $\exists \lim_{x \to A} f(x) = \exists f(A)$

f es continua en $S \subseteq D$ si es continua en todos los puntos de S

⇒ Ejemplo ① $f(x,y,z) = x^2 - yz$ ⟶ continua porque es polinomio

② $f(x,y) = \begin{cases} 1 & y \geq 0 \\ -1 & y < 0 \end{cases}$ no es continua



* Derivada de Campos

- Derivadas de campos escalares

Sea $f = D \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Sea $A \in D$ y $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$,

La derivada de f en A según $\vec{r}$ se define como $f'(A, \vec{r}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(A + h\vec{r}) - f(A)}{h}$

- (caso versor $\check{r}$)

Si $\|\vec{r}\| = 1$ el lim anterior nos da la derivada direccional $f(A, \check{r}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(A, \check{r}) - f(A)}{h}$

- (caso canónico $\check{r} = \check{e}_k$), $\check{e}_k = (\overbrace{\underbrace{0 \dots 1}_{k} \dots 0}^{n})$

→ en particular si se usa vector canónico, se lo llama derivada parcial de f en A respecto de x_k

$$f'(A, \check{e}_k) = \frac{df}{dx_k}(A)$$

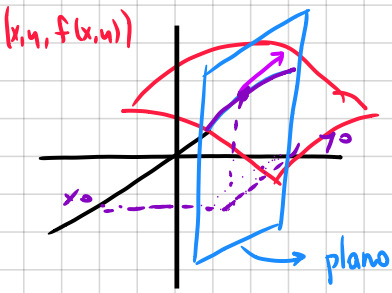
- propiedades

→ Si existe la derivada de un campo f en A según vector $\vec{r}$.

entonces existe la derivada en A según $\lambda\vec{r}$ siendo $\lambda \in \mathbb{R}$ (escalar) y se cumple $f'(A, \lambda\vec{r}) = k f'(A, \vec{r})$

→ Si $\vec{r} \neq \vec{0}$. $\check{r} = \frac{\vec{r}}{\|r\|} \Rightarrow \vec{r} = \|\vec{r}\| \check{r} \Rightarrow f'(A, \vec{r}) = \|\vec{r}\| f'(A, \check{r})$

* Interpretación Geométrica de Derivada Parcial



$$\frac{df}{dx}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f((x_0 + y_0) + (h, 0)) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\frac{df}{dy}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

plano $x = 1$ curva = [plano n superficie]

Derivada parcial → pendiente de la recta tg al punto de la curva formada por la intersección del plano y la superficie (gráfico)

*Ejemplos prácticos

$f(x, y, z) = xy + z^2$ → Cuando derivo respecto a una var. dejo las otras dos variables constantes

$\frac{d}{dx} f(x, y, z) = y \quad \frac{d}{dy} f(x, y, z) = x \quad \frac{d}{dz} f(x, y, z) = 2z$

7/4

- Ejemplo Derivada direccional

① $f(x,y) = 2-y^2$ → hallar derivada direccional f en $(1,-1)$ en direcc $\bar{r} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

⇒ $A + h\bar{r} = \left(1 + \frac{h\sqrt{2}}{2}, -1 + \frac{h\sqrt{2}}{2}\right)$

⇒ $f(A+h\bar{r}) = 2 - \left(-1 + \frac{h\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(1 + h\sqrt{2} - \frac{h^2}{2}\right)$

⇒ $\frac{df}{d\bar{r}}(1,-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(A+h\bar{r}) - f(A)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\sqrt{2}}{h} - \frac{h^2}{2h} = \sqrt{2} = \frac{df}{d\bar{r}}(1,-1)$

② $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ "Analizar derivada direccional de f en $A=(0,0)$ en toda dirección" → consider versor gen $\bar{r} = (a,b)$

⇒ $A + h\bar{r} = (ha, hb)$, $\neq (0,0)$

⇒ $f(A+h\bar{r}) = \frac{(ha)^2 hb}{(ha)^4 + (hb)^2} = \frac{ha^2 b}{h^2 a^4 + b^2}$

⇒ $\lim_{h\to 0} \frac{ha^2 b}{h^2 a^4 + b^2} \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^2 b}{h^2 a^4 + b^2} = \begin{cases} \frac{a^2}{b} & \text{si } a.b \neq 0 \quad (a\neq 0 \wedge b \neq 0) \\ 0 & \text{si } a.b = 0 \quad (a=0 \vee b=0) \end{cases}$

- "Para funciones de una variable, f derivable en A quiere decir f continua en A"

⇓

Esto no se aplica para campos escalares y vectoriales

↳ Un campo puede no ser continuo pero derivable en un punto

⇓

ejemplo función anterior $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

---

* Derivadas sucesivas

El Dominio de la función derivada es un subconjunto del Dominio de la función original $[D_{g'} \subseteq D_g]$

↳ ej: $g(x) = \ln(x) \longrightarrow D_g = (0,\infty)$

$g'(x) = \frac{1}{x} \longrightarrow D_{g'} = (0,\infty)$

* Derivadas parciales sucesivas

En gral una función de n variables tiene, si existen,

n^k derivadas parciales de orden k

¿Qué es orden? ↓ la cantidad de veces que se derivó de la función original

$\frac{df}{dx}(x,y)$ → $\frac{d^2f}{dx^2}$ → $\frac{d^3f}{dx^3}$, $\frac{d^3f}{dy\,dx^2}$

$\frac{df}{dx}(x,y)$ → $\frac{d^2f}{dy\,dx}$] → derivo respecto a "x" y luego "y"

$\frac{df}{dy}(x,y)$ → $\frac{d^2f}{dy^2}$ ...

$\frac{df}{dy}(x,y)$ → $\frac{d^2f}{dx\,dy}$] → derivo respecto a "y" y luego "x"

* TEOREMA DE SCHWARTZ ⇒ Verifica igualdad de derivadas parciales independientemente de orden de derivación

Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $A \in D$

$(k=1)$ → $\frac{df}{dx}$ y $\frac{df}{dy}$ existen en $B(A,r)$ no en punto sino en Bola abierta ↑ puntos cercanos a A del Dom D

$(k=2)$ → $\frac{d^2f}{dy\,dx}$ existe en $B(A,r)$ y continua en A → continua en un entorno A

entonces $\exists \frac{d^2f}{dx\,dy}$ y se cumple $\frac{d^2f}{dx\,dy}(A) = \frac{d^2f}{dy\,dx}(A)$

→ Son condiciones suficientes, pero no necesarias → puede no cumplir cont y que derivada en punto sea igual

→ El teorema puede resultar poco práctico para ciertas funciones

→ es válido para funciones de multivariables

→ En Resumen: las derivadas parciales sucesivas "mixtas" coinciden cuando:

- → las derivadas primeras existan en un entorno de punto a derivar $\frac{df}{dx}$ y $\frac{df}{dy}$
- → Las derivadas segundas mixtas deben existir en un en punto a derivar A $\frac{d^2f}{dy\,dx}$ y $\frac{d^2f}{dx\,dy}$
- → Al menos una derivada mixta debe ser continua en entorno de ese punto A

↓

Que exista derivada → $\exists$ coc incremental
que no sea cont. → derivada por partes

* Ejemplos:

- Derivada parcial no existe $f(x,y) = |x| + y$ $\begin{cases} x+y & \text{si } x \geq 0 \\ -x+y & \text{si } x < 0 \end{cases}$

→ $\frac{df}{dx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} = \begin{cases} \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \\ \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \end{cases}$

$\nexists \frac{df}{dx}(0,0)$, entonces $\nexists \frac{d^2f}{dy\,dx}$

- Derivada parcial no continua (pero existe) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si: } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

→ derivada parcial en (0,0)

$$\frac{df}{dx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

→ derivada parcial en $(x,y) \neq (0,0)$

$\frac{df}{dx}(x,y) = \frac{2xy(y^2)}{(x^2+y^2)^2}$] → $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy(y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{2}$ → no coincide con $\frac{df}{dx}(0,0)$ ↓ existe pero no es continua

- "Que exista derivada" ⟶ el cociente incremental tiene que ser finito y único
- "Que sea cont. derivada parcial" ⟶ para $\exists \frac{df}{dx}(x,y)$ en (a,b) =

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{df}{dx}(x,y) = \frac{df}{dx}(a,b)$$

→ Que exista lim en derivada → y que sea igual a der en ese punto

* Funciones de clase C^k

Sea $f = D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, Dom abierto y $k \in \mathbb{N}$,

Decimos que f es de clase C^k en $D \to (f \in C^k(D))$ si existen todas las derivadas parciales de f hasta orden k inclusive y son continuas en D

- Resumen =
  - → Todas sus derivadas parciales (de orden 1 a orden k) existen
  - → Todas las derivadas parciales (de ord 1 a ord k) son continuas

- Ej: → C^0 = f es continua (no necesariamente derivable)
  - → C^1 = f es continua y sus derivadas parciales de primer orden son continuas
  - → C^2 = f es cont y sus deriv parciales de 1er y 2do orden existen y son continuas
  - → C^∞ = todas sus derivadas de cualq orden existen y son continuas → $(e^x, \text{sen}(x))$

- OBS

- si $f \in C^{k+1}(D) \to f \in C^k(D)$
- si $f \in C^2$ en $B(A,r)$ → entonces cumple con teorema de Schwartz
- si $f \in C^k(B(A,r))$ los valores de las derivadas sucesivas de f en A hasta orden k inclusive no va a importar el orden de derivación, sino de la cantidad de veces que se deriva. respecto de c/ var
  - ↓ der C^k no importa orden, sino cant de veces → ya que cumple con Schwartz

* Derivadas campos vectoriales

↓

Un campo vectorial es un campo escalar en cada una de sus coord

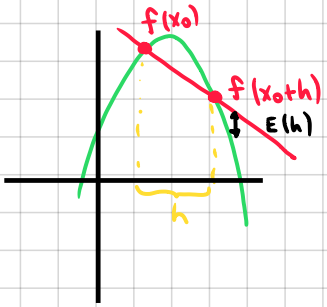
Su derivada devuelve un vector

Ej $f(x,y) = (f_1, f_2, f_3)$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial y}, \frac{\partial f_3}{\partial y}\right)$

f es derivable en A sólo si existen todas las derivadas parciales de las funciones coordenadas

CONCEPTO DIFERENCIABILIDAD

- Diferenciabilidad en $\mathbb{R}$



$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

⇓ reescritura

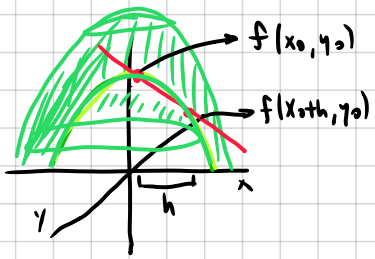
$$f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0) + E(h), \text{ donde } \lim_{h\to 0} \frac{E(h)}{h} = 0$$

$E(h)$ tiende más rápido que h que tiende a 0

→ ¿Continuidad de derivadas en una curva? ⇒ Que la función sea "suave" en ese punto

$$\lim_{x\to a^+} f'(x) = \lim_{x\to a^-} f'(x) \quad (= f'(a))$$

- Diferenciabilidad en $\mathbb{R}^2$ campos



$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$$

↳ en el método práctico mantenemos como constante la otra var.

Similar a cuando graficamos y hacemos "cortes con planos"

↳ permite relacionar 2 variables y no 3 al mismo tiempo

- reescritura $\boxed{h = \Delta x = x - x_0}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{E(\Delta x)}{\Delta x}$$ → 0

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

$$f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y + \frac{E(\Delta y)}{\Delta y}$$ → 0

→ Si es dif, entonces $\frac{E(\Delta x)}{\Delta x}$ y $\frac{E(\Delta y)}{\Delta y}$ tienden a 0

¿Y si tiendo a $\Delta x\to 0$ y $\Delta y\to 0$ al mismo tiempo? → sumando las dos ecuaciones parciales

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \left[f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y}_{L(x,y)\ \text{las derivadas parciales}} + \frac{E(\Delta x)}{\Delta x} + \frac{E(\Delta y)}{\Delta y} \right]$$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \left[\frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y\right)}{\|(\Delta x,\Delta y)\|} \right] = \frac{E(\Delta x)}{\Delta x} + \frac{E(\Delta y)}{\Delta y} = \frac{E(\Delta x,\Delta y)}{\|(\Delta x,\Delta y)\|}$$

* DEFINICIÓN. DIFERENCIABILIDAD

Sea $f = D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $A \in D^0$ (punto int).

Se dice que f es diferenciable de A si:

$$\lim_{H \to 0} \frac{f(A+H) - f(A) - TL(H)}{\|H\|} = 0$$

con $TL(H)$ transf Lineal

Los campos son TL ya que se pueden expresar con matriz asociada

ej: $f(x,y) = f(-x+2y, x-2y) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

↳ donde la matriz de TL son las derivadas parciales en ese punto

- Ejemplo

Caso $\mathbb{R}^2$. Sea $f = D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $A = (x_0, y_0) \in D^0$, $H = (h,k)$.

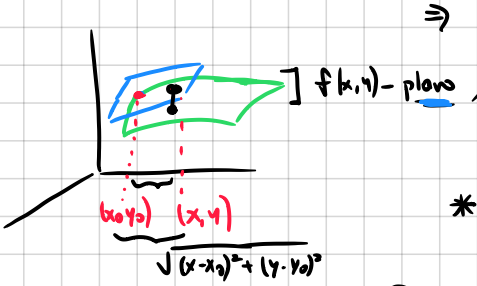
f es diferenciable si $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - (\alpha h + \beta k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ → $\begin{cases} \alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = f_x'(x_0,y_0) \\ \beta = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = f_y'(x_0,y_0) \end{cases}$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - \left(f(x_0,y_0) + f_x'(x_0,y_0)h + f_y'(x_0,y_0)k \right)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

⇒ ¿Y si reemplazo $h = \overset{\delta x}{x - x_0}$ y $k = \overset{\Delta y}{y - y_0}$? (INTERPRET. GEOM)

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - \left(f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \right)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$$

⇒ $z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$ → Ecuación plano



* TEOREMAS DIFERENCIABILIDAD

(T1) Una func vectorial dif en A si y sólo si todas sus funciones coord son dif en A

(T2) f diferenciable en A ⟶ f continua en A

(T3) f diferenciable en A ⟶ f derivable en A

(T4) Sea $f = D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con $n > 1$ y $A \in D^0$ s: $f \in C^1(E(A))$ entonces f dif en A

* Plano tangente

$z = f(x_0 y_0) + f_x'(x_0 y_0)(x-x_0) + f_y'(x_0 y_0)(y-y_0)$

→ el plano tangente permite una aproximación lineal al punto

↳ calc ecuación plano → reemplazar pto en plano

* GRADIENTE (sólo para campo escalar)

Sea f un campo escalar derivable en un punto A

El gradiente de f es el vector $\nabla f(A) = \left(\frac{\partial f(A)}{\partial x} \dots \frac{\partial f(A)}{\partial n} \right)$

Cuyo componentes son las derivadas parciales

* MATRIZ JACOBIANA

Matriz asociada a la TL de diferenciabilidad

Cuando $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(f = (f_1, \dots f_m))$ es dif en A la TL que existe tiene una matriz asociada llamada matriz jacobiana de f en A

$$D_f(A) = \begin{bmatrix} \nabla f_1(A) \\ \nabla f_2(A) \\ \nabla f_n(A) \end{bmatrix}$$

22/4

---

* Aproximación Lineal

Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $n>1$ y diferenciable $A \in D$.

Entonces $f(x) \cong f(A) + \nabla f(A)(x-A) \quad \forall x \in E(A) \subset D$

$f(x,y) \cong L(x,y)$ ↷ en un entorno cerca de $(x_0 y_0)$ donde se definió

* Conjunto conexo → Si se puede describir como $A \cup B$, con $A \cap B = \emptyset$ → como dos conjuntos sin intersec

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ Decimos que S es CONEXO si no se puede describir como unión disjunta de otros dos conjuntos no vacíos

A → conexo
B → no-conexo

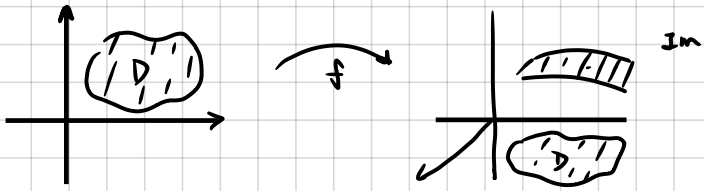
Teoremas ① Si S es arco-conexo → S es conexo

② Si S es abierto y conexo → S es arcoconexo

③ La imagen de un conjunto conexo, a través de una función continua, es un conj conexo

SUPERFICIES

Llamamos superficie a la imagen de un campo vectorial continua $\bar{F} = D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$



tener en cuenta que las parametrizaciones no son (x,y,z) → punto del espacio

- Para la notación sup. S o Σ (sigma)

  Si X es un pto genérico en $\mathbb{R}^3$ $X = \bar{F}(u,v)$, $(u,v) \in D$ es una ec. paramétrica de la superficie

  ↓ $\bar{F}$ es la parametrización con (u,v) de parámetros

- Como D es conj conexo (Dom natural) y $\bar{F}$ es continua entonces sup. es un conj conexo

* Líneas coordenadas → si mantengo fija un parámetro, entonces obtengo una curva en la superficie

Las líneas coordenadas son aquellas líneas incluidas en la superficie que se obtienen dejando uno de los parámetros fijo y variando el otro.

Si $u = u_0$; $X = F(u_0, v)$. $(u_0, v) \in D$ → $C_{v=v_0}$ $F(u, v_0)$

Si: $v = v_0$; $X = F(u, v_0)$, $(u, v_0) \in D$

* Puntos regulares y simples

Sea Σ la sup de ecuación $X = F(u,v)$, $(u,v) \in D$ y $A = F(u_0, v_0)$, $(u_0 v_0) \in D$

- A es un punto regular de Σ → $\bar{F}$ diferenciable en $(u_0 v_0)$ y $\frac{\partial F}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial F}{\partial v}(u_0, v_0) \neq \vec{0}$ (prod vectorial fundamental)

existencia del vector normal

- A es punto simple de Σ si es imagen, a través de $\bar{F}$ de un único punto en D → inyectividad
- Σ sup reg si todos sus puntos son regulares
- Σ sup simple si todos sus puntos son simples

* Plano tangente y recta normal a una superficie

si $A = \bar{F}(u_0 v_0)$, $(u_0 v_0) \in D$ un pto regular y simple

$\vec{N} = \frac{\partial F}{\partial u}(u_0 v_0) \times \frac{\partial F}{\partial v}(u_0 v_0)$ → OJO que las derivadas parciales no sean LD (linealmente dependientes)

↳ recta normal a Σ en A → $X = A + \lambda \vec{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

↳ plano tg → $\vec{N}(X - A) = 0$

↳ Ejemplo $f = D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D conexo y f continua en D

gráf f sup de ec $X = \underbrace{(x, y, f(x,y))}_{F(x,y)}$, $(x,y) \in D$

$F = D \to \mathbb{R}^3$

Si f diferenciable en D ↷ entonces sus ptos son reg y simples

F dif porque sus funciones coord son diferenciables

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{vmatrix} = \underbrace{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y), 1 \right)}_{\vec{N}_0} \neq 0$$

$A = \vec{F}(x_0 y_0) = (x_0, y_0, f(x_0 y_0))$

↳ plano = $\vec{N}_0 (X - A)$

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y), 1 \right) \left[(x,y,z) - (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \right]$$

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y), 1 \right) \left(x - x_0, y - y_0, z - f(x_0 y_0) \right)$$

$$\underbrace{z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 y_0)(y - y_0) + f(x_0 y_0)}$$

ecuación plano tangencial a sup en A