24/3/2025

FUNCIONES ($f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$)

* Clasificación

- $\boxed{m=1} \Rightarrow$ función escalar
  - $\to n=1 \to$ func escalar de una variable
  - $\to n>1 \to$ func escalar de varias variables (campo escalar)
- $\boxed{m>1} \Rightarrow$ Función vectorial
  - $\to n=1 \to$ función vectorial de una variable
  - $\to n>1 \to$ función vectorial de varias variables (campo vectorial)

$\Rightarrow$ Ejemplo

- $f(x,y,z) = x^2 + xyz$ $\Rightarrow$ campo escalar
- $\bar{f}(t) = \left(\text{sen}(t), \frac{1}{e^t}, \ln(t+1)\right)$ $\Rightarrow$ func vect de 1 var
- $\bar{f}(x,y,z) = \left(x+y^2, e^{x^2+y+z}\right)$ $\Rightarrow$ Campo vect

$\Rightarrow$ Cuando nos referimos a func vectorial

$$\bar{f}(x \ldots x_n) = \left(f_1(x \ldots x_n) \ldots \underbrace{f_n(x_1 \ldots x_n)}\right)$$

funciones coordenadas $\to$ func escalar de varias variables

---

* DOMINIO ($\text{Dom}(\bar{f})$)

El dominio de una función f es el conjunto en $\mathbb{R}^n$ donde está contenido

$\underbrace{D = \mathbb{R}^n}_{\text{Dominio natural}}$

- Ejemplo $f(t) = \left(\text{sen}(t), \frac{1}{e^t}, \ln(t+1)\right)$

El dom D de $\bar{f}(t)$ tiene que cumplir con $D(f_1)$ $D(f_2)$ y $D(f_3)$

$f_1 \to D = \mathbb{R}$

$f_2 \to D = \mathbb{R}$

$f_3 \to D = x > -1$

El dominio de $\bar{f}$ es la intersección de los dominios de las func coordenadas

$D = \{x \in \mathbb{R} / x > -1\}$

* LÍMITES

- Límite de func de una sola variable $\longrightarrow$ No es necesario pertenecer a la función o al dominio sino que sea un pto de acumulación
- límites de func vect de una sola var se calculan de la misma forma que $f = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Ejemplo =

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2+2,\ \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right) = \left(\overbrace{\lim_{x\to 0} x^2+2}^{f_1},\ \overbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}^{f_2}\right)$$

$\lim_{x\to 0}\bar{f}(x)$ existe si $\exists \lim_{x\to 0} f_1$ y $\exists \lim_{x\to 0} f_2$

* CONTINUIDAD (func vect de una variable)

TEOREMA $\rightarrow$ $f = D = \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, $m>1$ $f = (f_1 \dots f_m)$. Continua si f continua en $f_1 \dots f_m$ continua en $a \in \mathbb{R}$

- Ejemplo = Analizar continuidad en su dominio

$$\bar{f}(x) = \left(\frac{x^2-4}{x^2-2},\ x+2\right) \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{-2\} \Rightarrow f \text{ continua en todo su dominio ya que } -2 \notin \text{Dominio de } \bar{f}$$

* DERIVADA

- Ecuación recta tg $\longrightarrow$ $y = f'(a)(x-a) + f(a)$
- func escalares de un var $\longrightarrow$ coc incremental $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
- func vect de una var $f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $m>1$

$$f(t_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f_1(t_0+h)-f_1(h)}{h}, \dots, \frac{f_n(t_0+h)-f_n(h)}{h}\right)$$

- La coc incremental de una func vectorial de una variable (es derivable en t_0) si existen la derivadas de sus componentes en t_0 $\Rightarrow$ $f'(t_0) = (f_1'(t_0), \dots f_m'(t_0))$

- Ejemplo =

$\bar{f}(x) = (\operatorname{sen}(x),\ x^2+1)$ $\rightarrow$ derivable en todo su dom

$\rightarrow$ $f_1'(x) = \cos x$ $\quad f_2'(x) = 2x$

"$\bar{f}$ es derivable en todos los puntos de su dominio porque sus componentes lo son"

* CURVAS $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

- Sea $g = I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, $m=2 / m=3$ continua e I un intervalo

  Una curva es la imagen de $\bar{g}$

- Sea x un punto de $\mathbb{R}^m$ $\to$ ec paramétrica vectorial

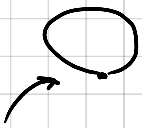
  $\vec{x} = \vec{g}(t)$, $t \in I \Rightarrow t$ es un parámetro y $\vec{g}(t)$ parametrización de la curva

  - la curva puede admitir distintas parametrizaciones
  - ¿Cómo tiene que ser I? $\longrightarrow$ cualquier tipo de conj $\to$ mientras no sea unión $(a,b) \cup \{c\}$ $\to$ no sería arcoconexo

- Arco de la curva $\longrightarrow$ Intervalo donde está definida la curva $\Rightarrow [a,b]$ int acotado y cerrado

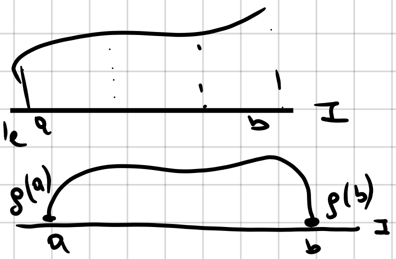
  $\hookrightarrow g(a)$ punto inicial , $g(b)$ pto final

  $\longrightarrow$ si $g(a) = g(b)$ entonces la curva es cerrada



  $\longrightarrow$ si $\vec{g}$ es inyectiva $\to$ curva simple

  $\hookrightarrow \vec{g}(a) = \vec{g}(b)$ y $\vec{g}$ inyectiva $(a,b]$ $\to$ Curva cerrada simple



- Ejemplos parametrización $\to$ poner los conjuntos a una sola variable

  ¿Qué se entiende por parametrización?

  $\hookrightarrow$ Expresar las coordenadas de los puntos de una curva en función de una sola variable (parámetro)

  $\hookrightarrow$ "Convertir obj geométrico a func vectorial de una sola variable"

  ¿Para qué sirve?

  $\hookrightarrow$ Simplifica los cálculos de tg. normal y tiene significado más intuitivo que utilizar los fórmula implícita

  ¿Cuándo utilizar ec implícita y cuándo parametrización?

  $\hookrightarrow$ Ec implícita $\to$ prop geométricas estáticas (ej. simetrías)

  $\hookrightarrow$ Parametrización $\to$ Cálculos dinámicos (movimiento, integrales, física)

- Ejemplo

  ② $x^2+y^2=4 \Rightarrow \vec{x} = (2\cos(t), 2\operatorname{sen}(t))$, $t \in [0,\pi]$

  Demo $(2\operatorname{sen}(t))^2 + (2\cos(t))^2 =$

  $4\,(\underbrace{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}_{1}) = 4$

  ③ Ec paramétrica vectorial $\bar{x} = (\operatorname{sen}(t), \cos(t), 2)$

- $g(x) = (x, \varphi(x))$ $\longrightarrow \bar{g}$ cont en I porque $\to x$ cont, $\hookrightarrow \varphi$ continua

  $\varphi = I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cont. ¡graf φ es curva!

ⓐ Sea $\varphi(x) = x^2, x \in \mathbb{R} \rightarrow$ curva → dom continua
↳ Img continua

③ Parametrización de una circunferencia con centro (x_0, y_0) y rad R_0

Ec. implícita $\underbrace{(x-x_0)}_{X}^2 + \underbrace{(y-y_0)}_{Y}^2 = R_0^2$

⇓

$$\begin{cases} x - x_0 = R_0 \cos(t) \rightarrow x = R_0 \cos(t) + x_0 \\ y - y_0 = R_0 \operatorname{sen}(t) \rightarrow y = R_0 \operatorname{sen}(t) + y_0 \end{cases}$$

Ejemplo práctica ⇒ Sea $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = x^2+y^2,\ 2x - 4y - z = 1\}$

¿Cómo se si es curva? Hallar una función donde su imagen sea C y continua en toda su parametr.

$$\begin{cases} z = x^2+y^2 \\ 2x-4y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-4y-1 = x^2+y^2 \\ z = 2x-4y-1 \end{cases}$$ ⇒ completar cuadrados

compl. cuadrados → $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 1 = (x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 + 1 = 0$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$$

$$g(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad z(t) = 2x(t) - 4y(t) - 1$$

$$\vec{g}(t) = (2\cos(t)+1,\ 2\operatorname{sen}(t)-2,\ 4\cos(t) - 8\operatorname{sen}(t) + 9)$$

$\vec{g}$ definida en int de $\mathbb{R}$ y es continua, por lo tanto la imagen de $\vec{g}$ es una curva

---

✱ CURVAS REGULARES Y SIMPLES

- Sea C una curva en $\mathbb{R}^m$ ($m=2 \vee m=3$) de ec $\vec{x} = \vec{g}(t), t \in I$ y $A = g(t_0)$ un punto interior de I

↳ A es un punto regular de C si $\exists\, \vec{g}'(t_0) \neq \vec{0}$

→ Si todos los puntos son regulares entonces la curva es regular → osea que no haya "picos"

→ A es un punto simple de curva si → no hay dos valores t_0 que me de A → inyect función $\vec{g}$

↳ un punto que no es simple es múltiple → si todos puntos simples → curva es simple

- Curva reg/simple → la idea es ver si puedo trazar rectas tangentes a la figura
  ↓
  el punto a trazar tiene que ser regular y simple

* RECTA TANGENTE Y NORMAL A CURVA ($\mathbb{R}^2$)

Sea C una curva en $\mathbb{R}^2$ de ecuación $\bar{X} = \bar{\rho}(t)$ con $t \in I$ y sea $A = \rho(t_0)$ un punto reg y simple de C

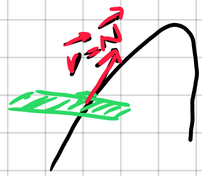
↳ recta tg $X_1 = A + \lambda \rho'(t)$ recta normal ⟷ $X_2 = A + \lambda \vec{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $v \perp \rho'(t)$

* RECTA TANGENTE Y PLANO NORMAL ($\mathbb{R}^3$)

C una curva en $\mathbb{R}^3$ de ec $\vec{x} = \rho(t)$ con $t \in I$, $A = \vec{\rho}(t_0)$ en $t_0 \in I$ un pto reg y simple de C

Se admite en A → rect tg de ecuación = $X + \lambda \vec{\rho}'(X_0)$

↳ plano normal $\vec{\rho}\,'(t_0)(X - A) = 0$



- **Actividad**

Hallar si existe ec recta tg a C parametrizada por

$\vec{\gamma}(t) = (2\cos(t) + 1,\ 2\,\mathrm{sen}(t) - 2,\ 9 + 4\cos(t) - 8\,\mathrm{sen}(t))$, $t \in [0, 2\pi]$ ⇒ en punto $(1,0,1)$

① Hallar valor t ⇒ tiene que coincidir en $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$

$$\begin{cases} 2\cos(t) + 1 = 1 \\ 2\,\mathrm{sen}(t) - 2 = 0 \\ 9 + 4\cos(t) - 8\,\mathrm{sen}(t) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos(t) = 0 \\ \mathrm{sen}(t) = 1 \\ (\cos(t) - 2\,\mathrm{sen}(t)) = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{2} \ \vee \ t = \frac{3\pi}{2} \\ t = \frac{\pi}{2} \ \vee \ t = \frac{3\pi}{2} \\ t = \frac{\pi}{2} \to \text{versi cumple ec} \end{cases} \Bigg\| \ \underline{t = \frac{\pi}{2}}$$

Existe único $t = \frac{\pi}{2}$ para obtener punto $(1,0,1)$ → punto regular

② hallar $\vec{\gamma}'(\frac{\pi}{2})$

$\vec{\gamma}'(t) = (-2\,\mathrm{sen}(t),\ +2\cos(t),\ -4\,\mathrm{sen}(t) - 8\cos(t))$ rect tg = $\vec{X}_1 = \lambda(-2,0,-4) + (1,0,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\vec{\gamma}'(\frac{\pi}{2}) = (-2, 0, -4)$ ⇒ punto regular → Admite recta tg