

22/6

* Teorema de Green

• Propósito

- Convertir Integral Doble en Integral de línea y viceversa (mayor simplicidad)

• Requisitos

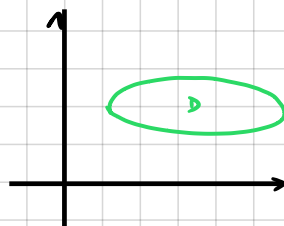
Sea D región plana con frontera ∂D y $f(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$

- $D \subset \mathbb{R}^2$ se puede subdiv. reg. fin. tipo 3

- ∂D curva cerrada

- $\vec{f} \in C^1$ en $D \cup \partial D$.

$$\oint_{\partial D^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_D (Q'_x - P'_y) dx dy$$



Ejemplo caso de uso $\rightarrow$ f complejo, pasarlo a Int. doble

$$\hookrightarrow \text{Cálculo } \text{area}(D) = \iint_D \underbrace{(Q'_x - P'_y)}_{\substack{1 \rightarrow f(x,y) = (0,x)}} dx dy = \oint_{\partial D^+} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

* Teorema de Stokes

• propósito

- facilitar trabajo $\vec{f}$ en curva cerrada en $\mathbb{R}^3$

• enunciado

Sea C curva, Σ superficie que tiene C como borde (frontera) y $\vec{f}$ camp vectorial ($\mathbb{R}^3$)

- C cerrada, simple y suave a trozos

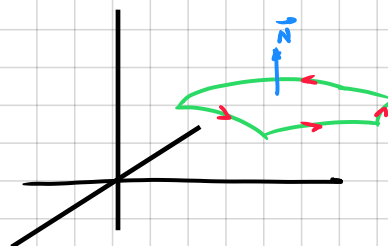
- Σ sup. abierta suave a trozos

- $\vec{f} \in C^1$ en $C \cup \Sigma$

$$\oint_{C^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_{\Sigma} \text{rot}(\vec{f}) \cdot \vec{n} d\sigma$$

calcular $\vec{f}$ en curva

básicamente calcular el flujo del $\text{rot}(\vec{f})$ en la superficie



$$\text{rot}(\vec{f}) = \nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

* Teorema de divergencia de Gauss

• propósito

- Sirve para calcular **flujo en superficie cerrada**

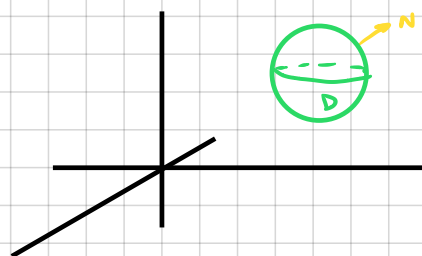
• enunciado

- D superficie con ∂D frontera y $f: A \rightarrow \mathbb{R}^3, A \subseteq \mathbb{R}^3$
- ∂D sup. cerrada y saliente de D

$$\oint_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iiint_D \operatorname{div}(f) \, dx \, dy \, dz$$

- nota: $\rightarrow \operatorname{div}(f) > 0 \rightarrow$ el campo se expande
- $\operatorname{div}(f) = 0 \rightarrow$ no se expande ni comprime
- $\operatorname{div}(f) < 0 \rightarrow$ el campo se comprime

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{f}) &= \nabla \cdot \vec{f} = \operatorname{tr}(Df) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (P, Q, R) \\ &= P'_x + Q'_y + R'_z \end{aligned}$$



* teorema función potencial

teorema

$\vec{f}: H \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, H abierto y conexo. Si $\oint_C \vec{f} \, d\vec{s} = 0 \quad \forall C \subset H$, entonces $\exists \phi: H \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} / \vec{f} = \nabla \phi$

prop-

$\hookrightarrow Df$ continua y sim, con H abierto y simpl conexo

$$\oint_{\partial D} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_D (\partial_x Q - \partial_y P) \, dx \, dy = 0 \rightarrow \text{ya que } \partial_x Q = \partial_y P \text{ por } \operatorname{rot}(\vec{f}) = 0 \text{ (Df simétrica)}$$

$$\oint_{C^+} \vec{f} \, d\vec{s} = \iint_{\Sigma} \operatorname{rot}(\vec{f}) \cdot \vec{n} \, d\sigma = 0$$

• usos

- Demostrar existencia de función potencial **en dominios no conexos**

$\hookrightarrow$ Si sobre una curva cerrada da 0 $\rightarrow \oint_C \vec{f} \, d\vec{s} = 0$ entonces en toda curva cerrada da 0 y admite función pot

$\hookrightarrow$ Si sobre curva cerrada no da 0 $\rightarrow \oint_C \vec{f} \, d\vec{s} \neq 0$ entonces en toda curva no admite función potencial