18/3/2025

Nociones de topología

* NORMAS

Sea $X = (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$, la norma de X denotada por $\|x\|$ es un num real no neg

$(\|x\| \geq 0)$ y $\|\bar{x}\| = 0 \rightarrow \vec{x} = \vec{0}$

(prop) $\rightarrow \|\lambda x\| = \|\lambda\| \|x\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$

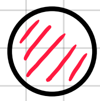
$\rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $y \in \mathbb{R}^n$

Existen dist normas, la usual es la euclidea que está dada por $\|x\| = \sqrt{x_1^2 \dots x_n^2}$

(Ej. la norma del máximo $\|x\|_\infty = \max(|x_1| \dots |x_n|)$)

Algunas definiciones

DEF BOLAS $\Rightarrow$ Sea $A \in \mathbb{R}^n$ y $r \in \mathbb{R}^+$

$\mathbb{R}^2 =$  no incluye circunferencia

- Bola Abierta con centro en A y radio r $\Rightarrow B(A,r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - A\| < r\}$
- Bola Abierta Reducida con centro A y rad r $\Rightarrow B^*(A,r) = \{x \in \mathbb{R}^n / 0 < \|x - A\| < r\}$

no incluye centro

$\rightarrow \mathbb{R}^2 =$ 

Ejemplos

$\boxed{\mathbb{R}}$ $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R} / |x-a| < r\} = (a-r, a+r)$

$B^*(a,r) = (a-r, a) \cup (a, a+r)$

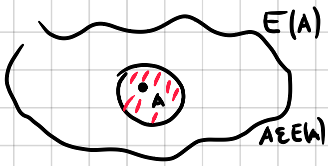
$\boxed{\mathbb{R}^2}$ $\bar{x} = (x,y)$ $A = (x_0, y_0)$

$B(A,r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |(x,y) - (x_0,y_0)| < r\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r$

* ENTORNO

Entorno de A $\rightarrow$ todo conjunto capaz de incluir a una bola abierta con centro en A



$\rightarrow$ Entorno reducido $= E^*(A) = E(A) - \{A\}$

En particular una bola abierta es un entorno porque puedo poner más bolas (bolitas) adentro

Obs

Una bola es un conjunto y un entorno también. La diferencia está en que un entorno puede llegar a tener otras formas a medida que aumento las dimensiones

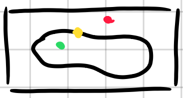
Entorno $\rightarrow$ bola
$\rightarrow$ espacio

* TIPOS DE PUNTOS

Sea $S \subset \mathbb{R}^n \to S$ es un entorno

- Punto interior → A es un punto interior de S si existe una bola abierta con centro A tal que todos sus puntos pertenecen a S → Se llama interior de S al conj de punto interior de S (notación S°)
- Punto Exterior → se llama pto exterior de S si $\exists B(A,r)$ que no tiene puntos en S.
  → Exterior de S → conjunto de ptos exteriores → ext(S)
- Punto fronterizo → A es pto fronterizo si la bola armada posee elementos de S° y ext(S)
  → frontera → conj de ptos fronterizos (notación δS)

Fig análisis



- exterior
- frontera
- interior

- Punto aislado → $A \in S$ pero la bola abierta $B=(A,r)$ los elementos no contiene puntos de S
  → Ejemplo si $S = [0,1) \cup \underbrace{\{3\}}$ → bola ab con $c=3$ no contiene ningún punto de S
- Punto de acumulación → A es pto de Acumulación si toda bola con centro en A tiene algún pto de S
  → A puede pertenecer o no al conjunto → frontera + interior

---

* TIPOS DE CONJUNTOS

Sea $S \subset \mathbb{R}^n$

- S es conjunto abierto si todos sus puntos son interiores $S = S^\circ$ → (a,b)
- S es conjunto cerrado si contiene a todos sus puntos de acumulación → $[a,b]$
- S es acotado si se lo puede abarcar en una bola abierta con centro en origen y radio finito
- S es compacto si es cerrado y acotado
  →

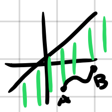
S es cerrado y acotado
$x^2+y^2=r^2$

$A \wedge B \in S$

- S es conjunto arcoconexo si $\forall (x_1 \dots x_n)$ existe una función $\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^n$ continua tal que su curva (imagen) está contenida en S y además $\gamma(0)=A$, $\gamma(1)=B$

Ejemplo

(1) $x \geq y$ ¿es arcoconexo? → sí



(2) $S: [0,1) \cup \{3\}$ → no existe función que una 3 con los puntos de $[0,1)$ sin pasar por puntos que $\notin S$