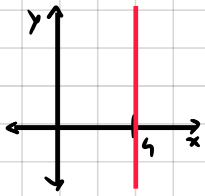
13/3/2025

Práctica 1 : Geometría del plano y del espacio - 陳傑恩

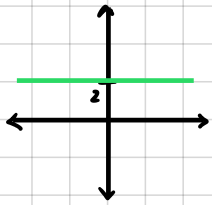
IAN :)

* Ejercicio 1 Realizar gráfico del conj que satisface ec

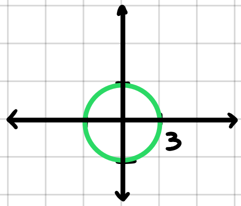
ⓐ $\mathbb{R}^2$, $x=4$



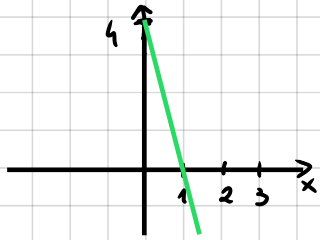
ⓑ $y=2$, $\mathbb{R}^2$



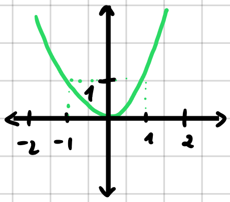
ⓒ $x^2+y^2=9$, $\mathbb{R}^2$



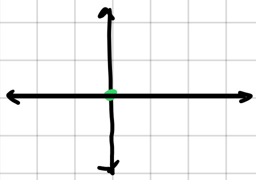
ⓓ $\mathbb{R}^2$, $2x+y=4$



ⓔ $y=x^2$, $\mathbb{R}^2$

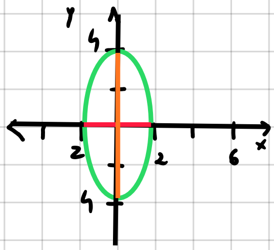


ⓕ $\mathbb{R}^2$, $x^2+y^2=0$



ⓖ $\mathbb{R}^2$, $4x^2+y^2=16$ (elipse)

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$ $a=2$ $b=4$



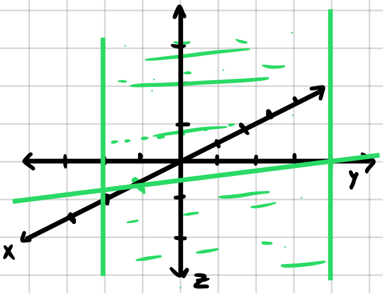
ⓗ $\mathbb{R}^3$, $2x+y=4$

↳ ¿Cómo grafico en $\mathbb{R}^3$? → cortes con planos

$\begin{cases} 2x+y=4 \\ z=0 \end{cases}$

$\begin{cases} y=4 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$

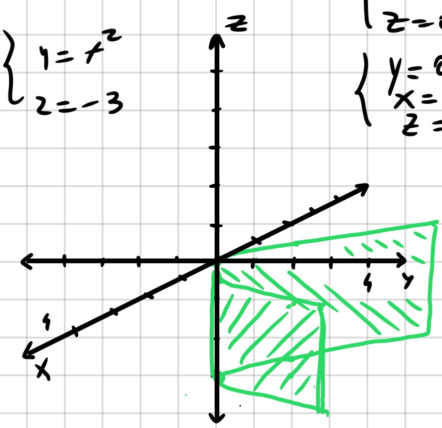


Ⓘ $\mathbb{R}^3$, $y=x^2$

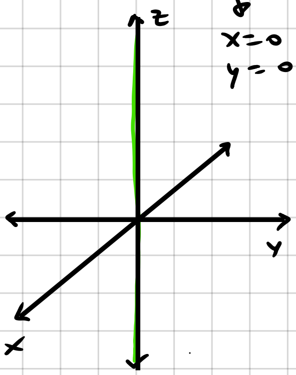
$\begin{cases} y=x^2 \\ z=0 \end{cases}$

$\begin{cases} y=x^2 \\ z=-3 \end{cases}$

$\begin{cases} y=0 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases}$

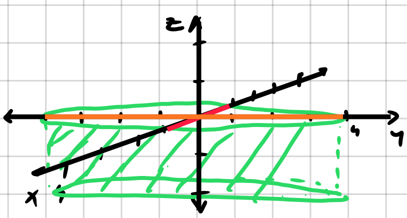


ⓙ $x^2+y^2=0$ → $x=0$, $y=0$

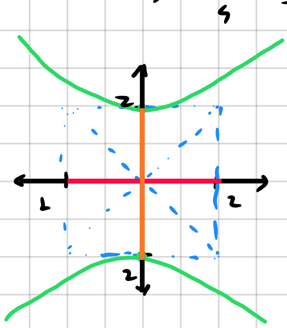


ⓚ $4x^2+y^2=16 \to \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$, $\mathbb{R}^3$

$\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1 \\ z=-2 \end{cases}$



ⓜ $y^2-x^2=4 \to -\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=1$ → hiperbola



ⓝ $(x-1)^2+y^2=0$

↓

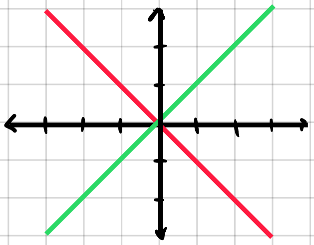
punto $(1,0)$

ⓞ $\mathbb{R}^2/$ $xy=4$

$y=\frac{4}{x}$ → función homográf

Elipse $a=1$ $b=2$
Centro $(-1,0)$

ⓟ $\mathbb{R}^2$, $|x|=|y| \longrightarrow \begin{cases} x=y & 1 \\ x=-y & 2 \end{cases}$ $\begin{cases} y=x & 1 \\ y=-x & 2 \end{cases}$

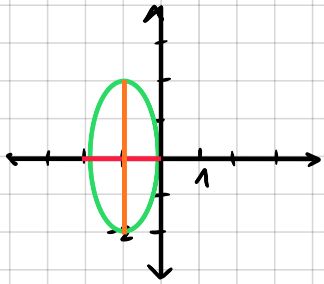


ⓠ $4x^2+8x+y^2=0$

$4(x^2+2.1x+1-1)+y^2=0$

$4(x+1)^2-4+y^2=0$

$(x+1)^2+\frac{y^2}{4}=1$

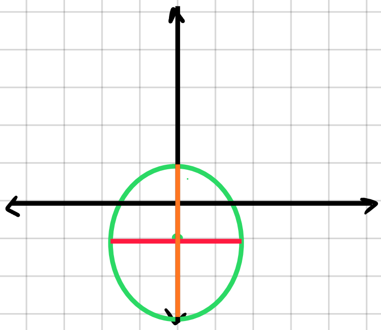


ⓡ $x^2-2y^2+4y=10$

$x^2-2(y^2+2.1y+1-1)=10$

$x^2-2(y+1)^2=8 \rightarrow \frac{x^2}{8}-\frac{(y+1)^2}{4}=1$

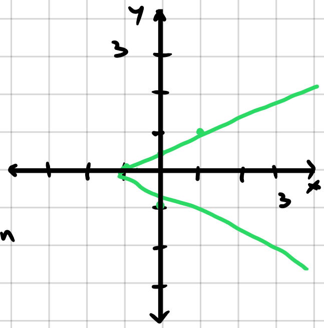
centro $(0,-1)$
$\begin{cases} a=\sqrt{8}\simeq 2{,}82 \\ b=2 \end{cases}$



ⓢ $x-2|y|+1=0$

$\begin{cases} x-2y+1=0 & \text{si } y>0 \\ x+2y+1=0 & \text{si } y<0 \end{cases}$

$\begin{cases} x=2y-1 & \text{si } y>0 \\ x=-2y-1 & \text{si } y<0 \end{cases} \rightarrow$ x en fun de y



✱ Ejercicio 2 Hallar ecuación cartesiana y graficar

ⓐ Recta que contiene $(2,3)$ y $(3,5)$

vector director $\vec{v}=(3,5)-(2,3)=(1,2)$ ecuación $\vec{r}(\lambda)=\lambda(1,2)+(3,5)$

ⓑ Circunferencia $R=3$ con centro $(3,0)$ $\Rightarrow$ $(x-3)^2+y^2=9$

ⓒ Elipse $\underbrace{\text{centro } (2,1)}$ ptos $(2,5)$ y $(1,3)$

$\frac{(x-2)^2}{a^2}+\frac{(y-1)^2}{b^2}=1$

• Hallar b
$\frac{(4)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \boxed{b=4}$

• Hallar a
$\frac{1}{a^2}+\frac{4}{16}=1 \Rightarrow \frac{1}{a^2}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$
$\boxed{a=\frac{2\sqrt{3}}{3}}$

ecuación $\rightarrow \frac{(x-2)^2}{\left(\frac{4}{3}\right)}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$

(d) Parábola con pto $(0,6)$ $v=(3,2)$ $\boxed{\text{eje } y=2}$ horizontal $\rightarrow$ término y^2

$$\underbrace{a(y-2)^2+3 = x}_{} \Rightarrow \text{hallar "}a\text{"} = a(4)^2+3=0 \Rightarrow a = \frac{-3}{16}$$

$$\frac{-3}{16}(y-2)^2 = x-3$$

---

* **Ejercicio 3** = $\longrightarrow$ poner "y" en función de "x" y $\alpha = \text{arctg}(m)$

(a) $x+y=2 \Rightarrow \alpha = \text{arctg}(-1) = \frac{3}{4}\pi$

(b) $x-y=4 \Rightarrow \alpha = \text{arctg}(1) = \frac{1}{4}\pi$

(c) $y=\sqrt{3}x+5 \Rightarrow \alpha = \text{arctg}(\sqrt{3}) = \frac{1}{3}\pi$

(d) $y=-\sqrt{3}x+5 \Rightarrow \alpha = \text{arctg}(-\sqrt{3}) = \frac{2}{3}\pi$

(e) $x+\sqrt{3}y=\sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \text{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{5}{6}\pi$

---

* **Ejercicio 4** En $\mathbb{R}^3$, hallar ecuaciones

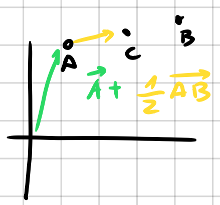
(a) recta que contiene $A=(1,2,4)$ y vector $\vec{r}(1,2,1) \Rightarrow L_1 = \lambda\overbrace{(1,2,1)}^{\vec{r}} + \overbrace{(1,2,4)}^{A}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(b) recta que contiene $A=(1,2,4)$ y $B=(2,5,7)$

vect director $\vec{v} = \vec{AB} = B-A = (2,5,7)-(1,2,4) = (1,3,3)$ $\quad L_2 = \mu(1,3,3)+(1,2,4)$, $\mu \in \mathbb{R}$

(c) Determinar punto medio medo del segmento $\overline{AB}$ $A=(1,2,4)$ $B=(2,5,7)$

• Fig análisis



$\vec{AB} = B-A = (1,3,3)$

$C = A + \frac{1}{2}\vec{AB} = (1,2,4)+\frac{1}{2}(1,3,3) = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{11}{2}\right)$

---

* **Ejercicio 5** Hallar ecuación del plano $Ax+By+Cz=D \Rightarrow$ ec plano

(a) Plano paralelo al plano $x=0$ y contiene $P=(1,2,-3)$

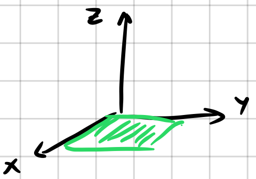
↳ Si es paralelo entonces tiene mismo vector normal

↳ plano $x=0$ $\longrightarrow$ puntos $(0,y,z) = y(0,1,0)+z(0,0,1)$ normal $= x(1,0,0)$

$\vec{N}=(1,0,0) \longrightarrow x+0y+0z=D \Rightarrow$ hallar D con punto P $\boxed{D=1}$

plano $= \boxed{x=1}$

(b) Plano perpendicular a eje z y pasa por punto $P=(1,-1,2)$



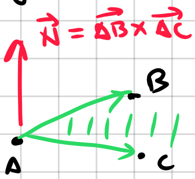
- la normal es el eje z (y múltiplos) $\Rightarrow \vec{N} = k(0,0,1)\ ,\ k \in \mathbb{R}$

$\hookrightarrow\ 0x + 0y + z = D$ ecuación $= \boxed{z=2}$

- reemplazar punto para hallar D $\Rightarrow 0.1 + 0.-1 + 2 = D$

(c) Contiene puntos $A=(1,1,0)$ $B=(0,2,1)$ y $C=(3,2,-1)$

Fig análisis



- hallar vectores

$\vec{AB} = B - A = (-1, 1, 1)$

$\vec{AC} = C - A = (2, 1, -1)$

- Hallar $\vec{N} = \vec{AB} \times \vec{AC}$

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \underbrace{i(-1-1) - j(1-2) + k(-1-2)}_{(-2,\,1,\,-3)}$$

- Armar ecuacion

$-2x + y - 3z = D$

- Hallar D con punto $A=(1,1,0)$

$-2+1 = \underbrace{D = -1}$

$\Rightarrow \pi: -2x + y - 3z = -1$

(d) Contiene al punto $(2,0,1)$ y perpendicular al vector $\vec{r} = (3,2,-1)$

- $\vec{N}$ plano $= \vec{r} = (3,2,-1) \Rightarrow 3x + 2y - z = D$
- Hallar D con punto $(2,0,1) \Rightarrow 6 - 1 = D = 5$

$\Big\}\ \pi = 3x + 2y - z = 5$

---

* Ejercicio 6 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos(\alpha)\ ,\ \alpha \in [0, \pi]$

(a) Calcular ángulos

(a_1) $\vec{u} = (1,2)$ $\vec{v} = (2,4)$ $\alpha = 0 \vee \alpha = \pi$

$$\cos(\alpha) = \frac{1.2 + 2.4}{\sqrt{1^2+2^2}\,\sqrt{2^2+4^2}} = 1$$

misma recta $\vec{r} = \lambda \vec{v}$

(a_2) $\vec{u} = (1,2)$ $\vec{v} = (2,-4)$ $\alpha \cong 2{,}21$

$$\cos(\alpha) = \frac{1.2 - 8}{2\sqrt{5}.\sqrt{5}} = -\frac{3}{5}$$

(b) Calcular ángulo entre $\vec{u} = (1,2,5)$ y $\vec{v} = (2,4,6)$

$$\cos(\alpha) = \frac{2 + 2\cdot 4 + 5\cdot 6}{\sqrt{1+2^2+5^2}\,\sqrt{2^2+4^2+6^2}} \cong 0{,}975 \Rightarrow \alpha \cong 0{,}21$$

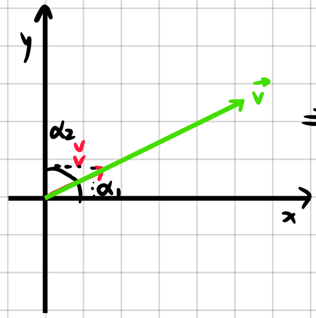
(c) Demostrar comp de versor es coseno del vector con versores canónicos

Sea $\vec v = (x_1, \dots x_n)$ $\check v = \frac{\vec v}{\|\vec v\|} = \left(\frac{x_1}{\|\vec v\|}, \dots, \frac{x_n}{\|\vec v\|}\right) \Longrightarrow \check v = (\cos(\alpha_1), \dots \cos(\alpha_n))$

Su versor es =

$\cos(\alpha_1)\ \frac{\vec v \cdot \overbrace{(1,0,\dots 0)}^{i}}{\|\vec v\| . 1} = \frac{x_1}{\|\vec v\|}$ $\frac{\vec v \cdot (0 \dots 1)}{\|\vec v\|\ 1} = \frac{x_n}{\|\vec v\|}$

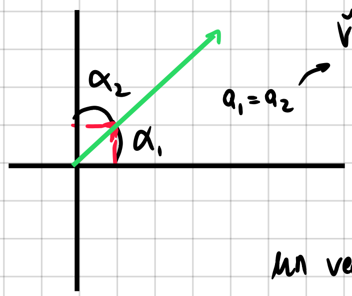
en $\mathbb{R}^2$



$\Rightarrow$ el vector divide al eje en dos ángulos α_1 y α_2, formando dos triángulos rectángulos cuyo catetos adyacente serían $x = \cos(\alpha_1)$ e $y = \cos(\alpha_2)$

(D) Hallar vector con versor de áng equivalentes entre los ejes en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^2$



$a_1 = a_2$

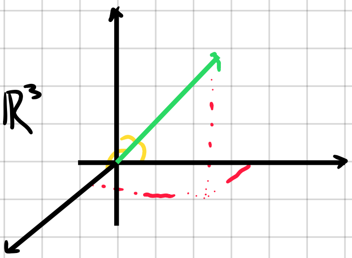
$\check v = (\cos(\alpha), \cos(\alpha))$ $\check v . i = \|\check v\| \|i\| \cos(\alpha)$

$\check v = \left(\frac{\sqrt2}{2}, \frac{\sqrt2}{2}\right)$ $\cos(\alpha) = \sqrt{\cos(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2} . \cos(\alpha)$

$2\cos^2(\alpha) = 1 \Rightarrow \cos(\alpha) = \sqrt{\frac12} = \frac{\sqrt2}{2}$

un vector podría ser $\vec r = (1,1)$ $\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt2}{2}\right) = \frac14 \pi$

$\mathbb{R}^3$



$\check u = (\cos(\alpha), \cos(\alpha), \cos(\alpha))$ $\check u . i = \|\check u\| \|i\| \cos(\alpha)$

$\cos(\alpha) = \sqrt{3\cos^2(\alpha)}\ \cos(\alpha)$

$\cos(\alpha) = \frac{\sqrt3}{3} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt3}{3}\right) \simeq 0{,}95$

14/3/25

---

* Ejercicio 7   Dados $\vec u = 2\check i + \check j - 2\check k$ y $\vec v = 2\check i - 2\check j - \check k$

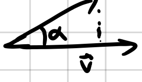
a) $\|\vec u\| = \sqrt{2^2+1^2+2^2} = 3$ $\|\vec v\| = \sqrt{2^2+2^2+1} = 3$

b) áng entre $\vec u$ y $\vec v$ $\cos\alpha = \frac{4-2+2}{9} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac49\right) = 1{,}1$ rad

c) $3\vec u - 2\vec v = 3(2,1,-2) - 2(2,-2,-1) = (2,7,-4)$

d) vector unitario paralelo a $\vec u \Rightarrow$ versor $\check u = \left(\frac23, \frac13, -\frac23\right)$

e) proyección $\vec u$ sobre $\vec v$



$proy_{\vec u_{\vec v}} = \|\vec u\| \cos(\alpha) = 3 . \frac49 = \frac43$

f) vector no nulo ortogonal

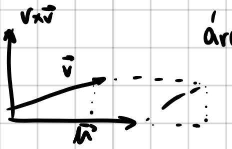
$\vec u \times \vec v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = i(-5) - j(2) + k(-6)$

$(-5,-2,-6)$

*** Ejercicio 8**

Área del paralelogramo con dos de sus lados los segmentos que unen origen con $(1,0,1)$ y $(0,2,1)$

Fig análisis



área paralelogramo $\rightarrow b.h$; $\rightarrow \|\vec{u}\times\vec{v}\|$

$\vec{u}=(1,0,1)\quad \vec{v}=(0,2,1)$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \check{i}(-2)-\check{j}(1)+\check{k}(2)$$

$(-2,-1,2)$

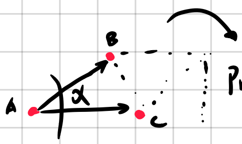
$$\text{área paralelogramo} = \|\vec{u}\times\vec{v}\| = \sqrt{2^2+1^2+2^2} = 3$$

*** Ejercicio 9**

Calcular área triángulo de vértices $\overset{B}{(1,1,1)}$, $\overset{A}{(0,1,2)}$ y $\overset{C}{(-1,0,1)}$

Fig análisis

área triángulo $= \dfrac{b.h}{2}$

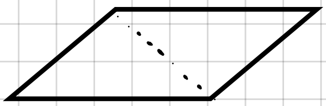


$h = \cos\alpha\,\|AB\|$

$$\boxed{\begin{aligned} AB &= B-A = (1,0,-1) \\ AC &= C-A = (-1,-1,-1) \end{aligned}}$$

• hallar α

$\cos\alpha = \dfrac{\overline{AB}.\overline{AC}}{\|AB\|\,\|AC\|} = 0 \rightarrow$ ortogonales



área triang $= \dfrac{b.h}{2}$; $b.h \rightarrow$ área paralelogramo

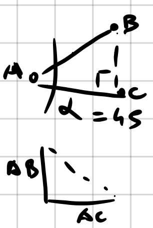
• hallar $\overline{AB}\times\overline{AC}$

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = i(-1)-j(-2)+k(-1) = (-1,2,-1)$$

$\|\vec{AB}\times\vec{AC}\| = \sqrt{1^2+2^2+1^2} = \sqrt{6}$

área triángulo $= \dfrac{\|\vec{AB}\times\vec{AC}\|}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

*** Ejercicio 10** probar $A=(1,-1,2)$ $B=(3,3,8)$ y $C=(2,0,1)$ tiene un ángulo recto



Si tiene un ángulo recto, hay 2 posibilidades

→ ángulo $\alpha = 45$ entre AB y AC

→ ángulo $\alpha = 90$ entre AB y AC

$AB = B-A = (2,4,6)$

$AC = C-A = (1,1,-1)$

• hallar α comprendido $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ → ortogonal AB con AC $\rightarrow \alpha = 90°$

$$\cos(\alpha) = \frac{AB.AC}{\|AB\|\,\|AC\|} = \frac{2+4-6}{\sqrt{2^2+4^2+6^2}\,\sqrt{3}} = 0$$

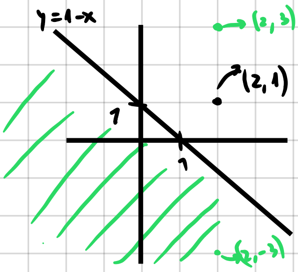
18/3

CONJUNTOS DEFINIDOS MEDIANTE INECUACIONES

*** Ejercicio 11** Graficar regiones xy del plano

ⓐ $x+y \leq 1$

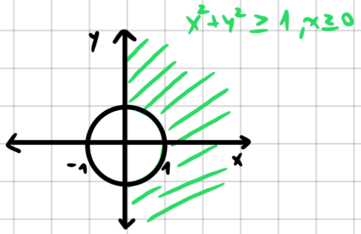
Hallar curva $y = 1-x$



ⓑ $x^2+y^2 \geq 1$, $x \geq 0$

↓

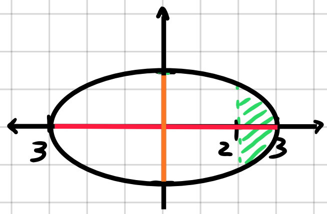
Similar $x^2+y^2=1$



ⓒ $x^2+4y^2<9$, $x \geq 2$

↓

Similar a $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{\left(\frac{9}{4}\right)} = 1$



ⓓ $x^2-2x+\frac{1}{4}y^2-y \leq 14$

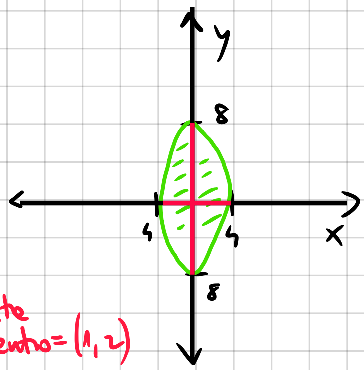
Similar $x^2-2x+\frac{1}{4}y^2-y = 14$

$$\left(x^2-2.1x+1^2-1^2\right)+\frac{1}{4}\left(y^2-2.2y+2^2-2^2\right)=14$$

$$(x-1)^2-1+\frac{1}{4}(y-2)^2-1=14$$

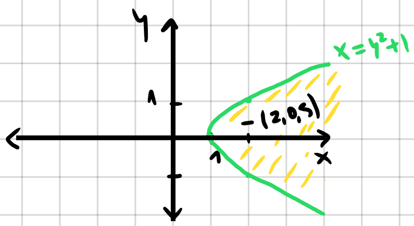
$$\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{56}=1 \Rightarrow \text{elipse} \quad \begin{matrix} a=4 \\ b=8 \end{matrix}$$

falta centro=(1,2)



ⓔ $x-y^2>1$

$x > y^2+1$ vertice $(1,0)$



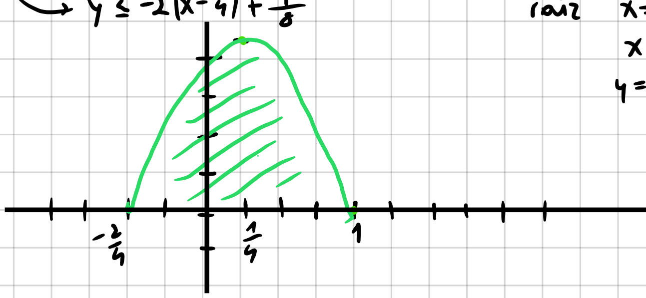
ⓕ $2x^2-x+y \leq 1$

$$2x^2-x+y=1 \Rightarrow 2\left(x^2-2.\tfrac{1}{4}x+\left(\tfrac{1}{4}\right)^2-\left(\tfrac{1}{4}\right)^2\right)+y=1$$

$$2\left(x-\tfrac{1}{4}\right)^2-\tfrac{1}{8}+y=1 \Rightarrow y=-2\left(x-\tfrac{1}{4}\right)^2+\tfrac{9}{8} \qquad v=\left(\tfrac{1}{4},\tfrac{9}{8}\right)$$

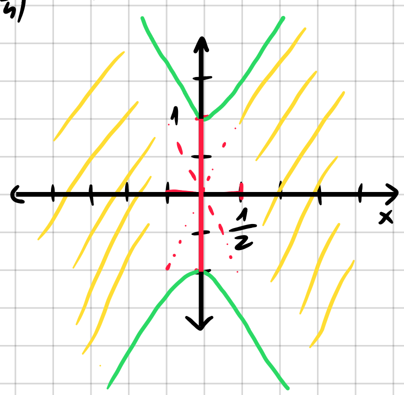
$\rightarrow y \leq -2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$

raiz $x=1=\frac{4}{4}$
$x=-\frac{2}{4}$
$y=0$



ⓖ $y^2-4x^2<1$

$-\frac{x^2}{\left(\frac{1}{4}\right)}+\frac{y^2}{1}=1$ hiperbole $a=\frac{1}{2}$, $b=1$



ⓗ $2x+y^2-y \leq 1$

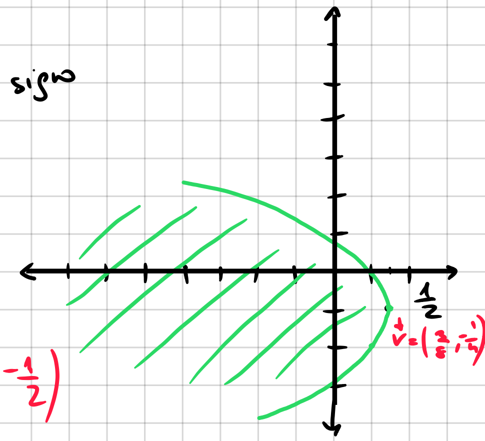
$2x \leq -y^2+y+1$ → ojo signo

$2x \leq -\left(y^2+2.\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}^2-\frac{1}{4}\right)+1$

$x \leq -\frac{1}{2}\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{8}$

$v=\left(\frac{3}{8},-\frac{1}{2}\right)$ $V=\left(\frac{3}{8},\frac{-1}{2}\right)$

eje sim $y=-\frac{1}{2}$



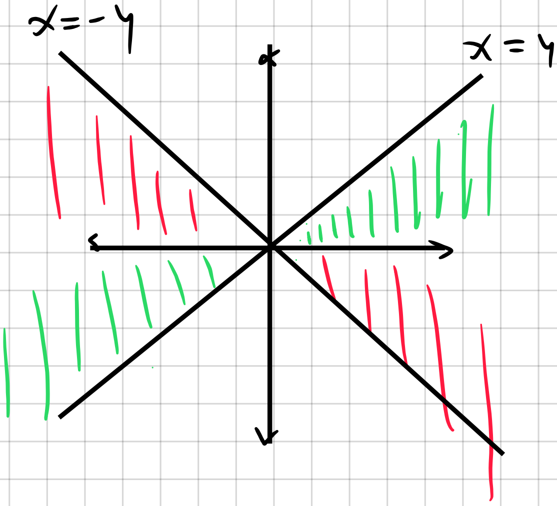
(i) $x^2-y^2>0$

$x^2>y^2 \Rightarrow$ similar $x^2=y^2$

$(x+y)(x-y)>0$

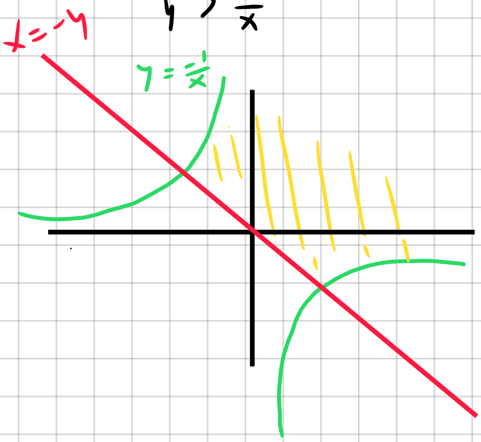
$\begin{cases}x+y>0\\x-y>0\end{cases} \vee \begin{cases}x+y<0\\x-y<0\end{cases}$

$\begin{cases}x>-y\\x>y\end{cases} \vee \begin{cases}x<-y\\x<y\end{cases}$

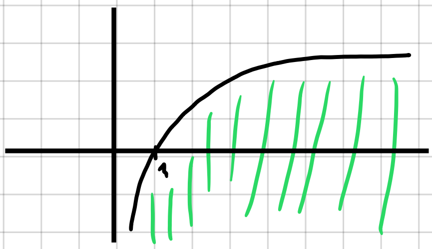


(j) $xy>-1$, $x+y\geq 0$

$y>\frac{-1}{x}$



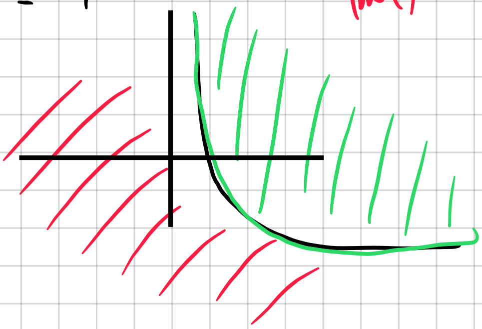
(k) $y<\ln(x)$



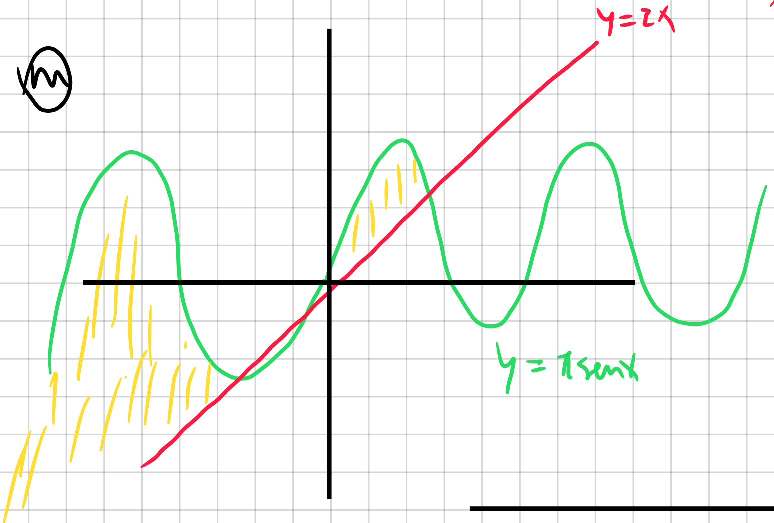
(l) $x\leq e^{-y}$

$\ln(x)\leq -y$; $y\leq -\ln(x)$

(mal)



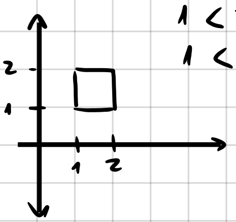
(m)



* Ejercicio 12   Describir las regiones en coord cartesianas

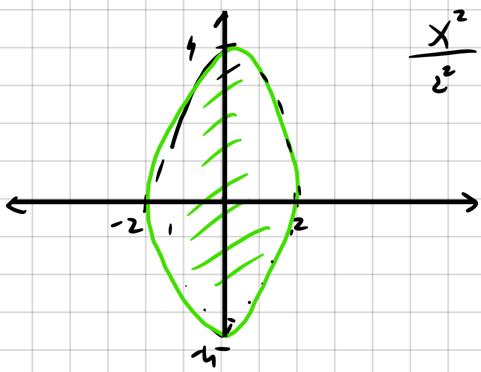
(a) Interior círculo en (0,0) y r=2 $\Longrightarrow x^2+y^2<4$

(b) Cuadrado lado 1 ejes paralelos a eje coord, vért inferior izq = (1,1)



$1<x<2$
$1<y<2$

(c)



$\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{4^2}<1$

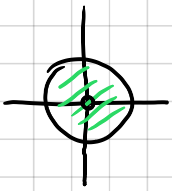
$\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{2^2}<1$

hay dos opciones rotando los semiejes ya que no especifica

20/3/2025

∗ Ejercicio 13 ⇒ Graficar los conjuntos, Describir el interior y frontera, clasificar conjuntos

ⓐ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 < x^2+y^2 < 1\}$



• Interior de frontera = $S^\circ = \{(x,y)/\ x^2+y^2<1\} - \{(0,0)\}$

• Frontera = $\partial S = \{(x,y)/\ x^2+y^2=1\} \cup \{(0,0)\}$

→ $S = S^\circ$ → el conjunto es abierto

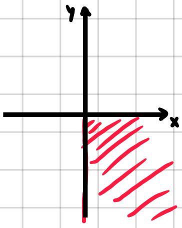
→ $\partial S \not\subset S$ → el conjunto no es cerrado pues no incluye sus ptos frontera

→ Conjunto compacto (NO) ← no es cerrado

→ Conj. acotado por $B(\bar{0}, 2)$

→ Conj arcoconexo

ⓑ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \geq 0,\ y < 0\}$



puntos interiores = $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ x>0,\ y<0\}$

puntos frontera = $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ x=0,\ y \leq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ y=0,\ x \geq 0\}$

• No es abierta → no son todos interiores

• No es cerrada → no contiene a todos pt. front

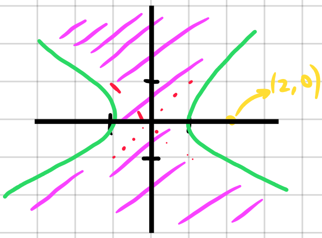
• No es acotado $x \to +\infty$ $y \to -\infty$

• no es compacto

• es arcoconexo → existe una dados $[A \text{ y } B] \in S$ existe $\bar{\gamma} = [0,1] \to \bar{\gamma}(0) = A$ y $\bar{\gamma}(1) = B$ y su curva es del conjunto

ⓒ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 < 1\}$

Parecido $x^2 - y^2 = 1$ (hipérbola) $a=1$ $b=1$



• Puntos interiores = $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ x^2 - y^2 < 1\}$

• Puntos frontera = $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ x^2 - y^2 = 1\}$

• Es abierta pues todos sus puntos son interiores

• No es cerrada pues no contiene sus puntos frontera

• No es acotado ya que $\nexists B(\bar{0}, r)$ con $r \in \mathbb{R}$ que contenga al conjunto

• es arcoconexo

ⓓ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ x^2+y^2 \leq 1,\ \underbrace{x \neq y}_{x=y}\}$

• Hallar conjunto no incluido $x = y$

$2x^2 \leq 1 \Rightarrow |x| \leq \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow |x| \leq \frac{1}{4} \to -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4}$

$|y| \leq \frac{1}{4} \to -\frac{1}{4} \leq y \leq \frac{1}{4}$ } un cuadrado? no, excluir recta $y=x$

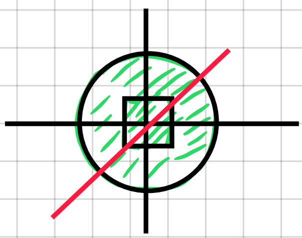
• Puntos interiores $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ x^2+y^2<1,\ x \neq y\}$

• Puntos frontera $\{(x,y) \in \mathbb{R}/\ x^2+y^2=1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ x \neq y\}$

• Es acotado pq $\exists B((0,0), 7) /\ S \subset B$

• No es compacto porque no es cerrado

• No es arcoconexo ya que no puede acceder a la otra mitad sin cruzar por $y = x$

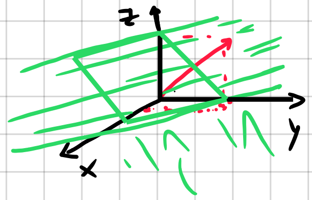


• No es abierto porque contiene pto frontera

• No es cerrado porque no contiene a todos sus ptos front

(e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y+z \geq 0\}$

↪ similar a un plano $x+y+z=0$



corte con planos

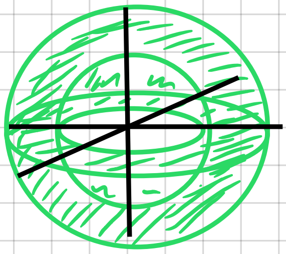
$\begin{cases} x=-y \\ z=0 \end{cases}$

$\begin{cases} z=-y \\ x=0 \end{cases}$

*Puntos

- puntos interiores $= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x+y+z > 0\}$
- puntos fronteras $= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x+y+z = 0\}$
- No es abierto porque incluye puntos frontera
- Es cerrado porque incluye sus frontera
- No es acotado $\nexists\, B(a,r),\ a \in \mathbb{R}^3,\ \underline{r \in \mathbb{R}}$ → no es compacto
- es arcoconexo

(f) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 5\}$ bola con bola adentro hueca



corte con planos

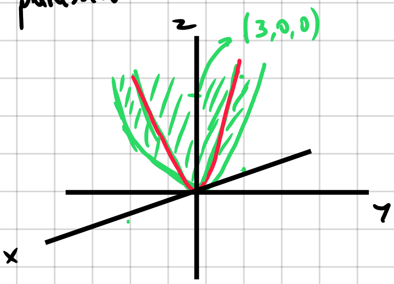
$\begin{cases} 1 \leq x^2+y^2 \leq 5 \\ z=0 \end{cases}$

$\begin{cases} 1 \leq y^2+z^2 \leq 5 \\ x=0 \end{cases}$

- puntos interiores $= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ 1 < x^2+y^2+z^2 < 5\}$
- puntos frontera $= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x^2+y^2+z^2 = 1\} \cup \{(x,y,z) / \ x^2+y^2+z^2 = 5\}$
- No es abierto porque contiene frontera
- Es cerrado porque incluye toda la frontera
- es acotado, es compacto, es arcoconexo

(g) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ z > x^2+y^2\}$

Similar paraboloide $z = x^2+y^2$



$\begin{cases} x^2+y^2=0 \\ z=0 \end{cases}$

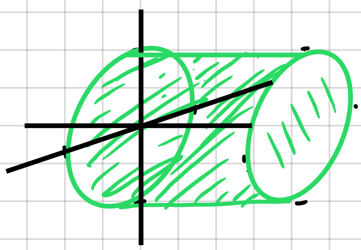
$\begin{cases} x^2=z \\ y=0 \end{cases}$

$\begin{cases} y^2=z \\ x=0 \end{cases}$

- puntos interiores $= \{(x,y,z) / \ z > x^2+y^2\}$
- puntos frontera $= \{(x,y,z) / \ z = x^2+y^2\}$
- Es conj abierto → son interiores $\forall A$, $A \in$ conj
- No es cerrado → no tiene frontera
- no es compacto, no es acotado, es arcoconexo

(h) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x^2+z^2 \leq 1\}$

Similar $x^2+z^2=1$ → cilindro



$\begin{cases} x^2+z^2=1 \\ y=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+z^2=1 \\ y=3 \end{cases}$

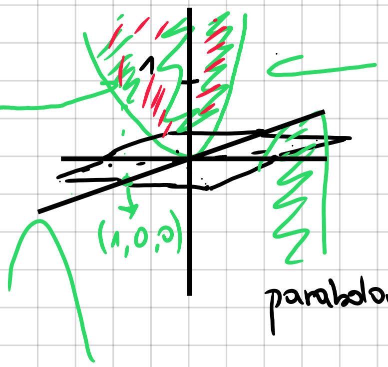
- puntos interiores $= \{(x,y,z) / \ x^2+z^2 < 1\}$
- frontera $= \{(x,y,z) / \ x^2+z^2 = 1\}$
- no es abierto porque incluye frontera
- Es cerrado porque incluye frontera (toda)
- No es acotado, no es compacto, Es arcoconexo

(i) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z > x^2 - y^2\}$

parecido $z = x^2 - y^2$

$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$ $\to x = y$, $x = -y$

$\begin{cases} z = x^2 \\ y = 0 \end{cases}$



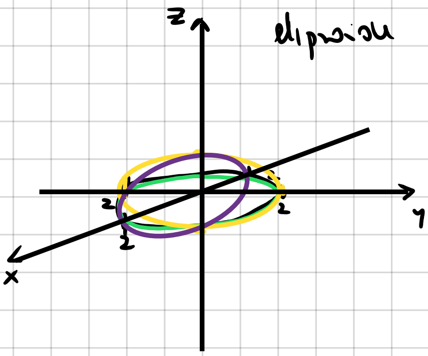
paraboloide hiperbólico

- puntos interiores $\{(x,y,z) / z > x^2+y^2\}$
- frontera $\{(x,y,z) / z = x^2+y^2\}$
- Es abierto $\to$ son interiores
- No es cerrado $\to$ no tiene pto frontera
- No acotado, No compacto. Sí arcoconexo

(j) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2+4z^2 \leq 4\}$

Similar $x^2+y^2+4z^2 = 4$ • corte planos

elipsoide



$\begin{cases} x^2+y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{y^2}{4} + z^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases}$

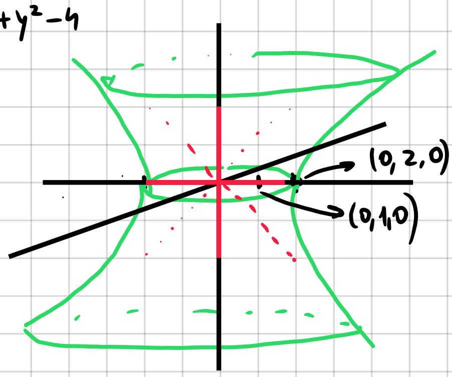
- pto int $= \{(x,y,z) / x^2+y^2+4z < 4\}$
- frontera $\{(x,y,z) / x^2+y^2+4z = 4\}$
- No es abierto $\to$ incluye front
- Es cerrado $\to$ incluye toda frontera
- Es acotado, es compacto, es arcoconexo

(k) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z^2 < x^2+y^2-4\}$

similar $z^2 = x^2+y^2-4$

$\begin{cases} x^2+y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 4 = y^2 - z^2 \\ x = 0 \end{cases}$ $\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1$



hiperboloide una hoja

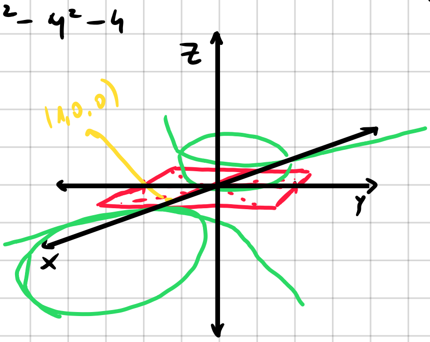
- pto int $= \{(x,y,z) / z^2 < x^2+y^2-4\}$ $\to$ los puntos afueras de hiperboloide
- front $= \{(x,y,z) / z^2 = x^2+y^2-4\}$
- Es abierto
- No es cerrado
- no es acotado
- no es compacto, es arcoconexo

(l) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z^2 < x^2 - y^2 - 4\}$

Similar $z^2 = x^2 - y^2 - 4$

$\begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

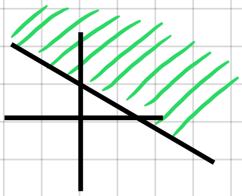
$\begin{cases} z^2 + y^2 = 0 \\ x = 2 \end{cases}$



- Interior $= \{(x,y,z) / z^2 < x^2 - y^2 - 4\}$
- frontera $= \{(x,y,z) / z^2 = x^2 - y^2 - 4\}$
- Es abierto porque son $\forall A / A \in S$ interior
- No es cerrado $\to$ no incluye frontera $\to$ no es compact
- No es acotado $\to \nexists B(A,r)$, $A=(0,0) \wedge r \in \mathbb{R} / S \subset B$
- Es arcoconexo

* ~Ejercicio 12~ → Hallar pto int, front, ext, indicar tipo de conj

(a) $x+y>2$



pto int → $x+y>2$

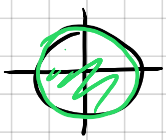
pto front → $x+y=2$

ext → $x+y<2$

- conjunto abierto
- no compacto → no cerrado, → no acotado
- arcoconexo

(b) $x^2+y^2\leq 4$

- cerrado, acotado = compacto



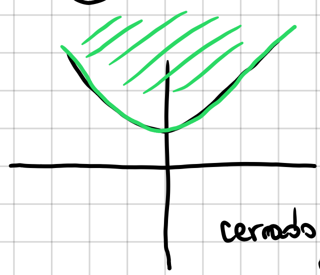
Un punto int = $(0,0)$

punto front = $(2,0)$

pto ext = $(3,0)$

· arcoconexo

(c) $y-2x^2\geq 2$



pto int = $(4,0)$

front $(0,2)$

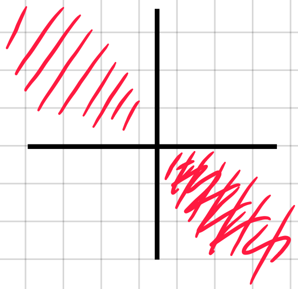
ext $(0,0)$

cerrado no acotado

arcoconexo

(d) $xy<0$

$\begin{cases} x<0 \\ y>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>0 \\ y<0 \end{cases}$



frontera $(0,0)$

int $(-2,3)$

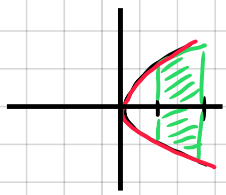
ext $(2,3)$

abierto

no acotado

arcoconexo

(e) $2<x<3$, $y^2<1$



int $(2.5,0)$

front $(2,0)$

ext $(0,0)$

(f) $(x-2y)(y-x^2)=0$

$x-2y=0 \vee y-x^2=0$

$x=2y \vee y=x^2$

$\downarrow$

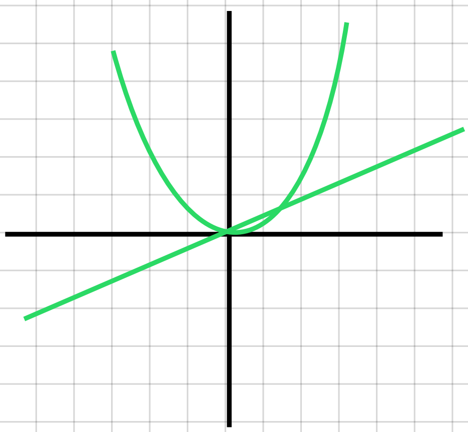
$y=\frac{1}{2}x$

$\nexists$ int = no existe

$\to \phi$

frontera = $(0,0)$

ext $(1,-1)$



- conj $\underbrace{\text{cerrado no acotado}}_{\text{no compacto}}$
- arcoconexo