Nombre y Apellido: Número de Padrón:

Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas. No se aceptarán cálculos dispersos, poco claros o sin comentarios. En la resolución de integrales, cada paso de integración debe resolverse indicando la primitiva y los límites correspondientes.

La evaluación se aprueba con 3 (tres) ejercicios bien resueltos.

Tema 1

- **Ejercicio 1.** Calcule la masa de la placa que ocupa la región del plano

  $$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 3|x|,\ y - 2x \leq 5\},$$

  suponiendo que la densidad de masa es proporcional a la distancia del punto al eje x.

- **Ejercicio 2.** Calcule $\int_C \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$, siendo

  $$\vec{f}(x, y, z) = (3x^2y^2z^2 + g(x), 2x^3yz^2 - x, 2x^3y^2z), \quad g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}),$$

  y C la curva parametrizada por $\vec{\alpha}(t) = (2\cos(t), 2\,\mathrm{sen}(t), 3 - 4\cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Considere la orientación dada por la parametrización.

- **Ejercicio 3.** Sean Σ la superficie definida por

  $$x^2 + y^2 = 4, \quad x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 2,$$

  y $\vec{f}(x, y, z) = (x + y, 2x + y, xz^2)$. Calcule el flujo de $\vec{f}$ a través de Σ. Indique en un gráfico la orientación elegida en el cálculo.

- **Ejercicio 4.** Calcule

  $$\iiint_H z\, dx\, dy\, dz,$$

  donde $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + 5z^2 \leq 9,\ 0 \leq z \leq 1\}$.

- **Ejercicio 5.** Sea C la porción de la linea del campo $\vec{g}(x, y) = (4y, -x)$ que pasa por $(2, 0)$ y está contenida en el semiplano $x \geq 1$.

  Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (-\pi y\,\mathrm{sen}(\pi x), \cos(\pi x))$ a lo largo de C recorrida de modo tal que las ordenadas sean crecientes.

- **Ejercicio 1.** Calcule la masa de la placa que ocupa la región del plano

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 3|x|,\ y - 2x \leq 5\},$$

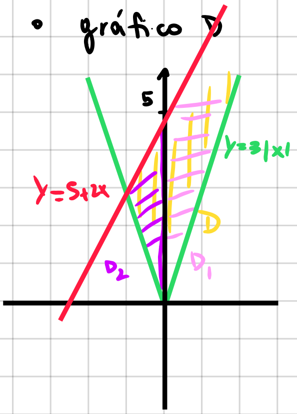
suponiendo que la densidad de masa es proporcional a la distancia del punto al eje x.

densidad $\delta(x,y) = K|y|$

según gráfico de D, $y \geq 0$ por lo que $\delta(x,y) = ky$

↳ procedimiento = graficar D, hallar lím integración, Integrar

- gráfico D



- Hallar límite de integración

$y - 2x \leq 5$

$y \leq 5 + 2x$

$D = \quad 3|x| \leq y \leq 2x + 5$

$D_1 = \;\hookrightarrow\; 3x \leq y \leq 2x + 5 \;. \qquad 0 \leq x \leq 5$

$D_2 : \;\hookrightarrow\; -3x \leq y \leq 2x + 5 \;, \qquad -1 \leq x \leq 0$

para hallar integracion de x en D_1 y D_2 hay que intersecar $3x$ con $2x+5$ y $-3x$ con $2x+5$

$D_1 = \quad 3x = 2x + 5 \longrightarrow x = 5$

$D_2 = \quad -3x \leq 2x+5 . \longrightarrow -1 \leq x$

Como $3|x|$ son dos curvas distintas podemos dividir $D = D_1 + D_2$ y $\text{masa}(D) = \text{masa}(D_1) + \text{masa}(D_2)$

- calcular masa D_1

$$\text{masa}(D_1) = \iint_{D_1} \delta \, dx dy = K \int_0^5 \int_{3x}^{2x+5} y \, dy dx = K \int_0^5 \frac{y^2}{2} \Big|_{3x}^{2x+5} dx = K \int_0^5 \frac{1}{2} \Big[(4x^2 + 20x + 25) - (9x^2) \Big] dx$$

$$= \frac{K}{2} \int_0^5 \left(-5x^2 + 20x + 25 \right) dx = \frac{K}{2} \left(\frac{-5x^3}{3} + 10x^2 + 25x \Big|_0^5 \right) = \frac{250K}{3}$$

- Calcular masa (D_2)

$$\text{masa}(D_2) = \iint_{D_2} \delta \, dx dy = \int_{-1}^{0} \int_{-3x}^{2x+5} ky \, dy dx = k \int_{-1}^{0} \frac{y^2}{2} \Big|_{-3x}^{2x+5} dx = \frac{k}{2} \int_{-1}^{0} (-5x^2 + 20x + 25) \, dx = \frac{k}{2} \left(-\frac{5x^3}{3} + 10x^2 + 25x \Big|_{-1}^{0} \right)$$

$$= \frac{k}{2} \left[0 - \left(-\frac{40}{3} \right) \right] = \frac{k}{2} \cdot \frac{40}{3} = \frac{20k}{3}$$

$$\text{masa}(D) = \text{masa}(D_1) + \text{masa}(D_2) = \frac{250k}{3} + \frac{20k}{3} = \frac{270k}{3}$$

- **Ejercicio 2.** Calcule $\int_C \vec{f}\cdot d\vec{s}$, siendo

$$\vec{f}(x,y,z) = (3x^2y^2z^2 + g(x), 2x^3yz^2 - x, 2x^3y^2z), \quad g \in C^1(\mathbb{R}),$$

y C la curva parametrizada por $\vec{\alpha}(t) = (2\cos(t), 2\,\text{sen}(t), 3 - 4\cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Considere la orientación dada por la parametrización.

- Planteo problema

$$\int_C \vec{f}\, d\vec{s} = \underbrace{\int_0^{2\pi} \vec{f}(\vec{\alpha}(t)) \cdot \alpha'(t)\, dt}$$

el problema con esto es que no sabemos valor de $g(x)$, además de que difícilmente se puede calcular $2x^3yz^2$ bien

↳ alternativa, si f es campo de gradiente, entonces

$$\int_0^{2\pi} \vec{f}(\vec{\alpha}(t)) . \vec{\alpha}'(t)\, dt = \phi(\vec{\alpha}(2\pi)) - \phi(\vec{\alpha}(0)) \text{ , tal que } \vec{f} = \nabla\phi$$

$\vec{\alpha}(2\pi) = (2\cos(2\pi), 2\,\text{sen}(2\pi), 3-4\cos(2\pi)) = (2,0,1)$

$\vec{\alpha}(0) = (2\cos(0), 2\,\text{sen}(0), 3-4\cos(0)) = (2,0,1)$

↳ $\vec{\alpha}(t)$, $t\in[0,2\pi]$ es curva cerrada

↓

da 0 si $\nabla \times f$ es 0 (D_f simétrico)

* Hallar función potencial de f (ϕ)

↳ $\text{Dom}(\vec{f}) = \mathbb{R}^3 \rightarrow$ conjunto simplemente conexo

- Hallar D_f simétrica (verificar), $f = (P, Q, R)$

$$D_f = \begin{pmatrix} P'_x & P'_y & P'_z \\ Q'_x & Q'_y & Q'_z \\ R'_x & R'_y & R'_z \end{pmatrix}$$

$(P'_y)\ 2y.3x^2.z^2 \neq 6x^2yz^2 - 1\ (Q'_x)$ $\quad P'_y \neq Q_x$ → no es campo conservativo

$(P'_z)\ 2z\,3x^2y^2 = 6x^2y^2z\ (R'_x)$ $\quad P'_z = R'_x$

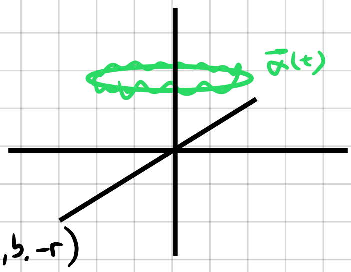
$(R'_y)\ 4x^3yz = 4x^3yz\ (Q'_z)$ $\quad R'_y = Q'_z$

↳ como $\vec{f}$ no es conservativo, no se puede usar func potencial, pero podemos intentar teorema de stokes

$$\oint_{\partial D^+} \vec{f}\, d\vec{s} = \iint_\Sigma \text{rot}(f) . \check{n}\, d\vec{\sigma} = \iint_D \text{rot}(\vec{f})\, \vec{\sigma}'_u \times \vec{\sigma}'_v\, du\, dv$$

$$\text{rot}(\vec{f}) = \nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = (0,0,-1)$$ constante

- parametrizar una superficie $\vec{\sigma}$ tal que $\vec{\alpha}(t)$ sea su frontera



$\vec{\sigma}(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\,\text{sen}(\theta), 3-2r\cos(\theta))$, $\quad 0 \leq r \leq 2$, $\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$

- $\vec{N} = \vec{\sigma}'_\theta \times \vec{\sigma}'_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -r\,\text{sen}(\theta) & r\cos(\theta) & 2r\,\text{sen}(\theta) \\ \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) & -2\cos(\theta) \end{vmatrix} \left(\underset{a}{\sim}, \underset{b}{\sim}, -r\,\text{sen}^2 - r\cos^2\right) = (a, b, -r)$

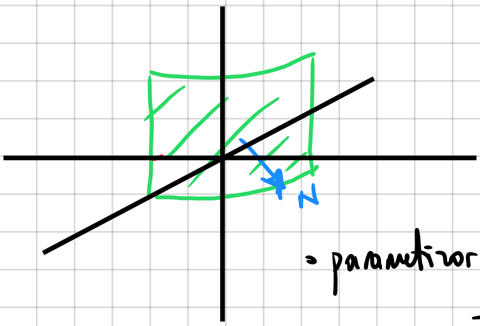
- calcular

$$\oint_{\partial D^+} \vec{f}\, d\vec{s} = \iint_\Sigma \text{rot}(f) . \check{n}\, d\vec{\sigma} = \iint_D (0,0,-1)(a,b,-r)\, dr\, d\theta = \int_0^2 \int_0^{2\pi} r\, dr\, d\theta = 2\pi \int_0^2 r\, dr = \pi r^2 \Big|_0^2 = 4\pi$$

- **Ejercicio 3.** Sean Σ la superficie definida por

$$x^2 + y^2 = 4, \quad x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 2,$$

y $\vec{f}(x,y,z) = (x+y, 2x+y, xz^2)$. Calcule el flujo de $\vec{f}$ a través de Σ. Indique en un gráfico la orientación elegida en el cálculo.



$$\text{flujo de } (\vec{f}) = \iint_{D_{xy}} \vec{f}(\vec{\sigma}) \cdot (\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y) \cdot dx\,dy$$

• proc = parametrizar sup. hallar normal sup. integrar

• parametrizar sup $\xrightarrow{\frac{1}{4}}$ cilindro circular radio 2, altura 2

$$\vec{\sigma}(\theta, z) = \left(2\cos(\theta),\ 2\operatorname{sen}(\theta),\ z\right)$$

coord cilíndricas $\begin{cases} x = 2\cos(\theta) \\ y = 2\operatorname{sen}(\theta) \\ z = z \end{cases}$ $\quad x \geq 0 \wedge y \geq 0$ $\quad \left.\begin{array}{l} \cos(\theta) \geq 0 \longrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen}(\theta) \geq 0 \longrightarrow 0 \leq \theta \leq \pi \end{array}\right\}$ $\quad \underbrace{\begin{array}{c} 0 \leq z \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{array}}_{D}$

• Hallar $\vec{\sigma}'_\theta \times \vec{\sigma}'_z = \vec{N}$

$$\vec{N} = \vec{\sigma}'_\theta \times \vec{\sigma}'_z = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & k \\ -2\operatorname{sen}\theta & 2\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2\cos\theta,\ 2\operatorname{sen}\theta,\ 0)$$

• Hallar $\vec{f}(\vec{\sigma})$

$$\vec{f}(\vec{\sigma}(\theta,z)) = \left(2\cos + 2\operatorname{sen},\ 4\cos + 2\operatorname{sen},\ 2\cos \cdot z^2\right)$$

• Calcular flujo

$$\text{flujo}(\vec{f}) = \iint_D (2\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta,\ 4\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta,\ 2z^2\cos\theta)\,(2\cos(\theta),\ 2\operatorname{sen}\theta,\ 0)\, dz\, d\theta$$

$$\iint_D 4\cos^2\theta + 2\operatorname{sen}(2\theta) + 4\operatorname{sen}(2\theta) + 4\operatorname{sen}^2\theta \; dz\,d\theta$$

$$\iint_D 4(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) + 6\operatorname{sen}(2\theta)\; dz\,d\theta$$

$$\iint_D 4 + 6\operatorname{sen}(2\theta)\, dz\, d\theta = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 + 6\operatorname{sen}(2\theta)\, d\theta\, dz = \int_0^2 \left(4\theta - 3\cos(2\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) dz$$

$$= \int_0^2 \left[(2\pi + 3) - (0 - 3)\right] dz = \int_0^2 2\pi + 6\; dr = (2\pi+6)\cdot r \Big|_0^2 = 4\pi + 12$$

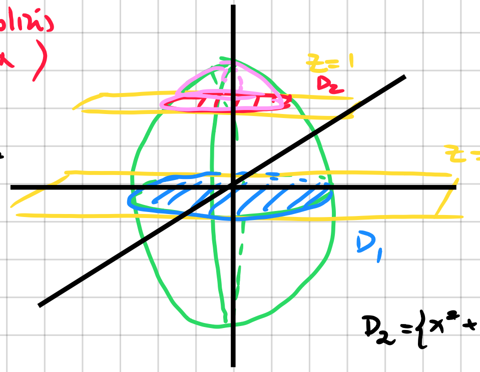
- **Ejercicio 4.** Calcule
$$\iiint_H z\,dx\,dy\,dz,$$
donde $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+5z^2 \le 9, \ 0 \le z \le 1\}$.

- Analizar ecuaciones

$x^2+y^2+5z^2 \le 9 \to$ un elipsoide $\to$ Intersección con plano $z=0$ y $z=1$

$\dfrac{x^2}{(3)^2}+\dfrac{y^2}{(3)^2}+\dfrac{z^2}{\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2} \le 1$

- Gráfico H (fig análisis aprox)



$D_2 = \{x^2+y^2 \le 4\}$

$D_1 = \{x^2+y^2 \le 9\}$

- Integral

$$\iiint_H z\,dx\,dy\,dz = \iint_{D_1} dx\,dy \int_0^{\sqrt{\frac{9-x^2-y^2}{5}}} z\,dz - \iint_{D_2} dx\,dy \int_1^{\sqrt{\frac{9-x^2-y^2}{5}}} z\,dz$$

$$\iint_{D_1} dx\,dy \int_0^{\sqrt{\frac{9-x^2-y^2}{5}}} z\,dz = \frac{1}{10}\iint_{D_1} 9-(x^2+y^2)\,dx\,dy = \frac{1}{10}\int_0^3\int_0^{2\pi}(9-r^2).r\,d\theta\,dr =$$

$$\frac{\pi}{5}\int_0^3 9r-r^3\,dr = \frac{\pi}{5}\left(\frac{9r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^3 = \frac{81\pi}{20}$$

$$\iint_{D_2} dx\,dy \int_1^{\sqrt{\frac{9-x^2-y^2}{5}}} z\,dz = \frac{1}{2}\iint_{D_2} z^2\Big|_1^{\sqrt{\frac{9-x^2-y^2}{5}}} dx\,dy = \frac{1}{2}\iint_{D_2}\frac{9-(x^2+y^2)}{5}-1\,dx\,dy = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\iint_{D_2}(4-r^2)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{1}{10}\int_0^2\int_0^{2\pi}(4r-r^3)\,d\theta\,dr = \frac{\pi}{5}\int_0^2 4r-r^3\,dr = \frac{\pi}{5}\left(2r^2-\frac{r^4}{4}\Big|_0^2\right) = \frac{4\pi}{5}$$

$$\iiint_H z\,dx\,dy\,dz = \frac{81\pi}{20} - \frac{4\pi}{5} = \frac{13\pi}{4}$$

- **Ejercicio 5.** Sea C la porción de la linea del campo $\vec{g}(x,y) = (4y, -x)$ que pasa por $(2,0)$ y está contenida en el semiplano $x \geq 1$.

  Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x,y) = (-\pi y \operatorname{sen}(\pi x), \cos(\pi x))$ a lo largo de C recorrida de modo tal que las ordenadas sean crecientes.

∘ Hallar C $\quad (x'(t), y'(t)) = (4y, -x)$

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = 4y \longrightarrow \partial t = \frac{\partial x}{4y} \\ \frac{\partial y}{\partial t} = -x \longrightarrow \partial t = \frac{\partial y}{-x} \end{cases}$$

$$\frac{dx}{4y} = \frac{dy}{-x}$$

$$-x\,dx = 4y\,dy$$

$$-\int x\,dx = \int 4y\,dy$$

$$2y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + k$$

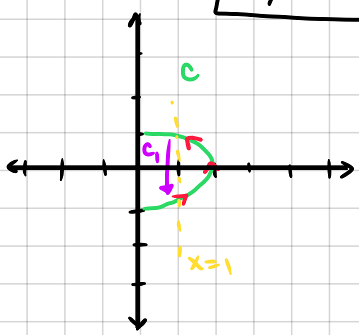
$$0 = -\frac{1}{2}2^2 + k$$

$$\boxed{k = 2}$$

} tiene que cumplir $(2,0)$ ↳ $x = 2$ ↳ $y = 0$

∘ Gráfico C: $\frac{1}{2}x^2 + 2y^2 = 2$

$$\boxed{\frac{x^2}{4} + y^2 = 1} \longrightarrow \text{elipse}$$



$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

$$x = 2\sqrt{1-y^2}$$

$$(2\sqrt{1-y^2}, y) \longrightarrow \rho(t) = (2\sqrt{1-t^2}, t)$$

t_0 y t_1 son valores de y donde elipse intersecta con $x=1$

$$\frac{1}{4} + y^2 = 1$$

$$y = \pm\sqrt{1-\frac{1}{4}}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Circulación campo f

$$\int_C \vec{f}\,d\vec{s} = \underbrace{\oint_{\partial D} \vec{f}\cdot d\vec{s}}_{\iint_D Q'_x - P'_y \, dxdy} - \int_{C_1^+} \vec{f}\,d\vec{s}$$

$$\oint_{\partial D} \vec{f}\,d\vec{s} = \iint_D -\pi\operatorname{sen}(\pi x) - (-\pi\operatorname{sen}(\pi x))\,dxdy = \iint_D 0\,dxdy = 0$$

$$\int_{C_1^+} \vec{f}\,d\vec{s} = \int_1^{-1} \vec{f}(0,t)\,(0,1)\,dt = \int_1^{-1} (-\pi t\operatorname{sen}(0), \cos(0))(0,1)\,dt = \int_1^{-1} 1\,dt = t\Big|_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

$C_1 = \rho(t) = (0,t), \quad t_0 = 1, \; t_2 = -1$