|27/6/2025|

FIUBA Análisis Matemático II - Examen Integrador 25-2-2025

Nombre y Apellido: Número de Padrón:

Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas. No se aceptarán cálculos dispersos, poco claros o sin comentarios. En la resolución de integrales, cada paso de integración debe resolverse indicando la primitiva y los límites correspondientes.

La evaluación se aprueba con 3 (tres) ejercicios bien resueltos.

Tema 1

- **Ejercicio 1.** Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x,y,z) = (-y, z, z^2)$ a través de la frontera de
$$H = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 12,\ \sqrt{2x^2 + y^2} \leq z\right\}.$$
Indique en un gráfico la orientación utilizada en el cálculo.

- **Ejercicio 2.** Calcule $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$, siendo
$$\vec{f}(x,y,z) = (2x + yz, 4y + xz, xy)$$
y C el arco de curva definido por
$$x^2 + y^2 = 2y, \qquad x^2 + y^2 - z = 0, \qquad x \geq 0,$$
recorrido de modo tal que la coordenada y sea creciente.

- **Ejercicio 3.** Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x,y,z) = (x,y,z)$ a través de la porción del plano de ecuación $x + y + z = 2$ contenido en el primer octante. Indique en un gráfico la orientación considerada.

- **Ejercicio 4.** Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x,y) = (y^2 + h(2x+2y), h(2x+2y) + e^y)$, con $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, a lo largo del borde de la región
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq y \leq 3\}$$
recorrida en sentido horario.

- **Ejercicio 5.** Sea $\mathcal{F}$ la familia de curva: $y = k(x-3)$, $k \in \mathbb{R}$, y sea $\mathcal{G}$ la familia de curvas ortogonales a las curvas de $\mathcal{F}$. Sea D la región acotada de $\mathbb{R}^2$ cuyo borde es la curva de $\mathcal{G}$ que pasa por $(0,0)$. Calcule
$$\iint_D x\, dxdy.$$

- **Ejercicio 1.** Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x,y,z) = (-y, z, z^2)$ a través de la frontera de
$$H = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + z^2 \le 12,\ \sqrt{2x^2+y^2} \le z\right\}.$$
Indique en un gráfico la orientación utilizada en el cálculo.

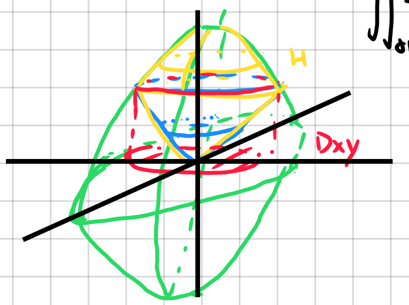
∘ Procedimiento = Analizar ecuaciones, graficar ecuaciones, Calcular flujo

∘ Analizar ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + 2y^2 + z^2 \le 12 \\ \dfrac{x^2}{(\sqrt{12})^2} + \dfrac{y^2}{(\sqrt{6})^2} + \dfrac{z^2}{(\sqrt{12})^2} \le 1 \end{array}\right\} \text{elipsoide}$$

$\sqrt{2x^2+y^2} \le z \to$ cono "elíptico"
↳ corta con $z = k$, $k>0$ da elipses

• Gráfico fig análisis



$$\iint_{\partial H} \vec{f}\,\hat{n}\, d\vec{\sigma} = \iiint_H \operatorname{div}(\vec{f}).\, dV$$

teorema de gauss

en vez de buscar ∂H ya tenemos H

$r^2\cos^2\theta + 2r^2\operatorname{sen}^2\theta$
$r^2(\cos^2\theta + 2\operatorname{sen}^2\theta)$

∘ Hallar div$(\vec{f})$

$$\operatorname{div}(\vec{f}) = \nabla \cdot \vec{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (-y, z, z^2) = 0 + 0 + 2z = 2z$$

∘ Hallar límites de integración

$$\iint_{\partial H} \vec{f}\,\hat{n}\, d\vec{\sigma} = \iiint_H \operatorname{div}(\vec{f}).\, dV = \iint_{D_{xy}} dx\,dy \cdot \int_{z_1}^{z_2} 2z\, dz$$

→ Hallar límites de integración

$$\begin{cases} z \ge \sqrt{2x^2+y^2}, & z \ge 0 \\ x^2 + 2y^2 + z^2 \le 12 \end{cases} \to \sqrt{2x^2+y^2} \le z^2 \le \sqrt{12 - x^2 - 2y^2}$$

↳ D_{xy} es int $\sqrt{2x^2+y^2} = \sqrt{12-x^2-2y^2}$

$3x^2 + 3y^2 = 12 \longrightarrow \boxed{x^2+y^2=4}$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$
$0 \le r \le 2$
$0 \le \theta \le 2\pi$
$|J(r,\theta)| = r$

∘ Calcular flujo

$$\iint_{\partial H} \vec{f}\,\hat{n}\, d\vec{\sigma} = \iiint_H \operatorname{div}(\vec{f}).\, dV = \iint_{D_{xy}} dx\,dy \cdot \int_{z_1}^{z_2} 2z\, dz = 2\iint_{D_{xy}} dx\,dy \int_{\sqrt{2x^2+y^2}}^{\sqrt{12-x^2-2y^2}} z\, dz = \iint_{D_{xy}} z^2 \Big|_{\sqrt{2x^2+y^2}}^{\sqrt{12-x^2-2y^2}} dx\,dy$$

$$\iint_{D_{xy}} 12 - x^2 - 2y^2 - 2x^2 - y^2\, dx\,dy = \iint_{D_{xy}} 12 - 3(x^2+y^2)\, dx\,dy$$

$$\int_0^2\int_0^{2\pi} [12 - 3(r^2)]\, r\, d\theta\, dr = 2\pi\int_0^2 12r - 3r^3\, dr = 2\pi\left[6r^2 - \frac{3r^4}{4}\Big|_0^2\right] = 24\pi$$

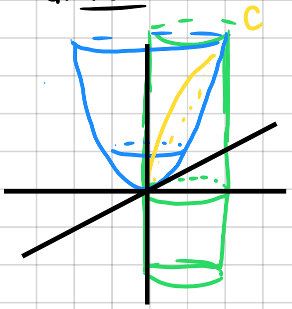
▪ **Ejercicio 2.** Calcule $\int_C \vec{f}\cdot d\vec{s}$, siendo

$$\vec{f}(x,y,z) = (2x+yz, 4y+xz, xy)$$

y C el arco de curva definido por

$$x^2+y^2=2y, \qquad x^2+y^2-z=0, \qquad x\geq 0,$$

• Gráfico C



$x^2+y^2=2y$

$x^2+y^2-2y+1=1$

$x^2+(y-1)^2=1$ } cilindro circular

$x^2+y^2-z=0$

$z=x^2+y^2 \to$ parabolóide

C es la curva generada por la intersección entre paraboloide y cilindro.

$\begin{cases} x^2+y^2=2y \\ z=x^2+y^2 \end{cases} \to \boxed{z=2y} \to$ plano donde intersecta

$\begin{cases} z=2y \\ x^2+(y-1)^2=1 \end{cases}$ → intersección de plano con cilindro me da elipse

$\downarrow$

$\begin{cases} z=2y \\ |x| = \begin{cases} \sqrt{1-(y-1)^2} \\ \sqrt{1-(y-1)^2} \end{cases} \end{cases}$

$g(t) = \left(\sqrt{2t-t^2}, t, 2t\right)$. $\sqrt{2t-t^2}\geq 0$

$2t-t^2\geq 0$

$t(2-t)\geq 0$

$0\leq t\leq 2$

$\vec{g}(t) = \left(\sqrt{2t-t^2}, t, 2t\right), \quad 0\leq t\leq 2$

$\vec{g}'(t) = \left(\frac{1-t}{\sqrt{2t-t^2}}, 1, 2\right), \quad 0\leq t\leq 2$

$\vec{f}(\vec{g}(t)) = \left(2\sqrt{2t-t^2}+2t^2, 4t+2t\sqrt{2t-t^2}\right.$

ver si f es conservativo

$\mathrm{rot}(f) = \nabla\times\vec{f} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (0,0,0)$

Como f conservativo y simpl conexo

$\int_C \vec{f}\,d\vec{s} = F(g(2)) - F(g(0))$, donde $\vec{f} = \nabla F$

• Hallar F

$\frac{\partial F}{\partial z} = xy \to \int dF = \int xy\,dz \to F = xyz + \alpha_1(x) + \alpha_2(y)$

$\frac{\partial F}{\partial x} = yz + \alpha_1'(x) = 2x+yz \to \alpha_1'(x) = 2x \to \alpha_1(x) = x^2 \to F = xyz+x^2$

$\frac{\partial F}{\partial y} = xz + \alpha_2'(y) = 4y+xz \to \alpha'(y) = 4y \to \alpha_2(y) = 2y^2 \to F = xyz+x^2+2y^2+k$

$\vec{g}(0) = (0,0,0), \quad \vec{g}(2) = (0,2,4)$

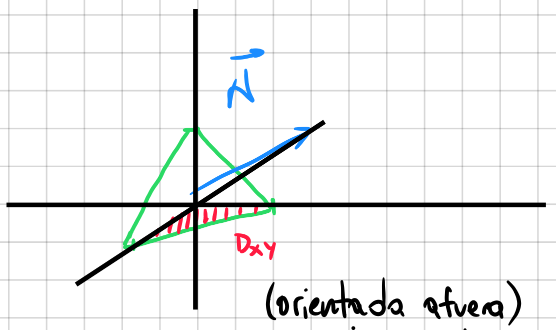
$F(\vec{g}(0)) = k, \quad \vec{F}(\vec{g}(2)) = \vec{F}(0,2,4) = 8+k$

$$\int_C \vec{f}\,ds = \int_0^2 \vec{f}(\vec{g}(t))\cdot\vec{g}'(t)\,dt = F(\vec{g}(2)) - F(\vec{g}(0)) = 8+k-k = 8$$

- **Ejercicio 3.** Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de la porción del plano de ecuación $x + y + z = 2$ contenido en el primer octante. Indique en un gráfico la orientación considerada.

- gráfico

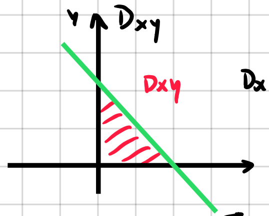
$$\text{flujo } \vec{f} \text{ en } \Sigma = \int_\Sigma \vec{f}\, \check{n}\, d\vec{\sigma} = \iint_{D_{xy}} \vec{f}(\vec{\sigma}) \cdot (\vec{\sigma}'_x \times \vec{\sigma}'_y)\, dx\, dy$$



(orientada afuera)
primer cuadr

- Parametrizar $x+y+z=2$

$\vec{\sigma}(x,y) = (x, y, 2-x-y)$, $(x,y) \in D_{xy}$



$D_{xy} = \{ 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 2-x \}$

- Hallar $\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y$

$$\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 1) \checkmark$$

- Hallar $\vec{f}(\vec{\sigma})$

$\vec{f}(\vec{\sigma}(x,y)) = \vec{f}(x, y, 2-x-y) = (x, y, 2-x-y)$

- Calcular flujo

$$\text{flujo } \vec{f} \text{ en } \Sigma = \int_\Sigma \vec{f}\, \check{n}\, d\vec{\sigma} = \iint_{D_{xy}} \vec{f}(\vec{\sigma}) \cdot (\vec{\sigma}'_x \times \vec{\sigma}'_y)\, dx\, dy$$

$$= \iint_{D_{xy}} (x, y, 2-x-y)(1,1,1)\, dx\, dy = \iint_{D_{xy}} x+y+2-x-y\, dx\, dy = \iint_{D_{xy}} 2\, dx\, dy = 2\iint_{D_{xy}} dx\, dy$$

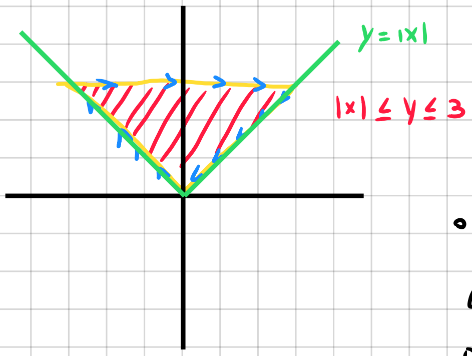
$$= 2\int_0^2 \int_0^{2-x} dy\, dx = 2\int_0^2 2-x\, dx = 2\left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2 = 4$$

- **Ejercicio 4.** Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x,y) = (y^2 + h(2x+2y), h(2x+2y) + e^y)$, con $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, a lo largo del borde de la región

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq y \leq 3\}$$

recorrida en sentido horario.

∘ Gráfico D



$$\oint_{\partial D^-} \vec{f}\, d\vec{s} = -\oint_{\partial D^+} \vec{f}\, d\vec{s} = -\iint_D (Q_x' - P_y')\, dx\, dy$$

$$\vec{f}(x,y) = (P, Q)$$

∘ Hallar $Q_x' - P_y'$

$$Q_x' = 2h'(2x+2y)$$
$$P_y' = 2h'(2x+2y) + 2y$$
$$Q_x' - P_y' = -2y$$

∘ Hallar limite de integracion D_{xy}

$$D_{xy} = \{ |x| \leq y \leq 3, \quad -3 \leq x \leq 3 \}$$

$$D_1 = \{ x \leq y \leq 3 \text{ con } 0 \leq x \leq 3 \}$$
$$D_2 = \{ -x \leq y \leq 3 \text{ con } -3 \leq x \leq 0 \}$$

dividir D_1 y D_2 por módulo

$$\iint_D Q_x' - P_y'\, dx\, dy = \iint_{D_1} Q_x' - P_y'\, dx\, dy + \iint_{D_2} Q_x' - P_y'\, dx\, dy$$

se puede cambiar orden de integración

$$-y \leq x \leq y$$
$$0 \leq y \leq 3$$

∘ Calcular $\iint_D Q_x' - P_y'\, dx\, dy$

$$\int_0^3 \int_{-y}^{y} -2y\, dx\, dy = \int_0^3 -2yx \Big|_{-y}^{y} dy = \int_0^3 -2y^2 - (+2y^2)\, dy = \int_0^3 -4y^2\, dy = -\frac{4}{3} y^3 \Big|_0^3 = -36$$

$$\oint_{\partial D^-} \vec{f}\, d\vec{s} = -\iint_D Q_x' - P_y'\, dx\, dy = -(-36) = 36$$

- **Ejercicio 5.** Sea $\mathcal{F}$ la familia de curva: $y = k(x-3)$, $k \in \mathbb{R}$, y sea $\mathcal{G}$ la familia de curvas ortogonales a las curvas de $\mathcal{F}$. Sea D la región acotada de $\mathbb{R}^2$ cuyo borde es la curva de $\mathcal{G}$ que pasa por $(0,0)$. Calcule

$$\iint_D x\, dxdy.$$

- Hallar G por ecuación de F: $y = k(x-3)$

$\hookrightarrow$ $y = k(x-3)$ } pasar ec dif

$y' = k$

$\hookrightarrow$ $y = y'(x-3)$ } fam ortogonal

$y = -\frac{1}{y'}(x-3)$

$y \cdot \frac{dy}{dx} = -(x-3)$

$\int y\, dy = -\int (x-3)\, dx$

$\frac{y^2}{2} = -\left(\frac{x^2}{2} - 3x\right) + C$

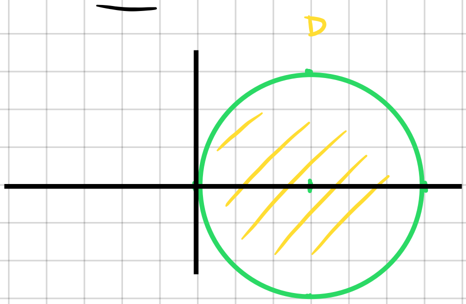
$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - 3x = C$

$x^2 - 6x + y^2 = K$ → si pasa $(0,0)$, $K = 0$

$x^2 - 2\cdot 3x + y^2 = 0$

$(x^2-3)^2 + y^2 = 9$

- Gráfico D



$D = \{ (x-3)^2 + y^2 \leq 9 \}$

$\begin{cases} x = r\cos(\theta) + 3 \\ y = r\,\text{sen}(\theta) \end{cases}$, $0 \leq r \leq 3$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\iint_D x\,dxdy = \int_0^3 \int_0^{2\pi} (3 + r\cos\theta) \cdot r\, d\theta\, dr = \int_0^3 \int_0^{2\pi} (3r + r^2\cos(\theta))\, d\theta\, dr$$

$$= \int_0^3 \left(3r\theta + r^2 \text{sen}\,\theta\right)\Big|_0^{2\pi} dr = \int_0^3 (6\pi r)\, dr = 3\pi r^2 \Big|_0^3 = 27\pi$$

$$\iint_D x\, dxdy = 27\pi$$