26/6/2025 fecha de rec

FIUBA Análisis Matemático II - Examen Integrador 10-12-2024

Nombre y Apellido: Número de Padrón:

Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas. No se aceptarán cálculos dispersos, poco claros o sin comentarios. En la resolución de integrales, cada paso de integración debe resolverse indicando la primitiva y los límites correspondientes.

La evaluación se aprueba con 3 (tres) ejercicios bien resueltos.

Tema 1

- **Ejercicio 1.** Calcule

$$\iiint_H yz\,dx\,dy\,dz$$

donde

$$H = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+4z^2 \leq 8,\ y \geq 0,\ z \geq 1\right\}.$$

- **Ejercicio 2.** Calcular $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$, siendo

$$\vec{f}(x,y,z) = (2xy^3z^2 - y, 3x^2y^2z^2 + \varphi(y), 2x^2y^3z), \quad \varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$$

y C el borde de la superficie

$$\Sigma : x+y+z=2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0.$$

Indique en un gráfico el sentido de recorrido elegido para el cálculo.

- **Ejercicio 3.** Sea Γ el arco de de la curva de ecuación

$$\vec{X} = (\cos(\pi t), \operatorname{sen}(\pi t), t), \quad t \in \mathbb{R}$$

contenido en la región $D : x^2+y^2+2z^2 \leq 3$. Calcule la longitud de Γ.

- **Ejercicio 4.** Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x,y) = (y^2 + h(y), xh'(y) + \cos(y))$, siendo $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, a lo largo del borde de la región

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$$

recorrido en sentido horario.

- **Ejercicio 5.** Sea Γ la porción de la línea del campo vectorial $\vec{g}(x,y) = (9y, -x)$ que pasa por $(0,1)$ y está contenida en el semiplano $x - 3y \leq 0$.

Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x,y) = (x + xy^2, 2 + x^2y)$ a lo largo de Γ. Indique en un gráfico el sentido de recorrido empleado en el cálculo.

■ **Ejercicio 1.** Calcule

$$\iiint_H yz\,dx\,dy\,dz$$

donde

$$H = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+4z^2\le 8,\ y\ge 0,\ z\ge 1\right\}.$$

• Analizar procedimiento → analizar ecuaciones, graficar H, Hallar región de Integración, realizar cálculo

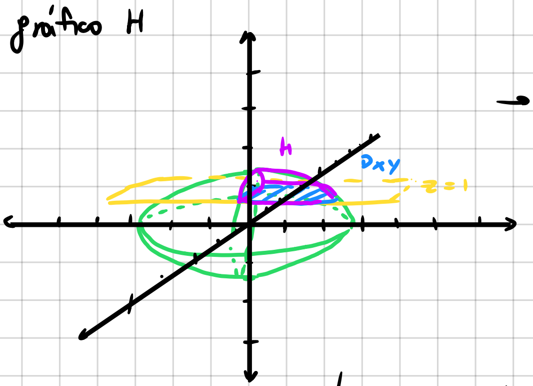
• Analizar ecuaciones

$x^2+y^2+4z^2\le 8$

$\frac{x^2}{(\sqrt{8})^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{8})^2}+\frac{z^2}{(\sqrt{2})^2}\le 1$

↳ elipse

• gráfico H



• Hallar lím de integración

→ z varía entre el el plano $z=1$ y parte de elipsoide

$x^2+y^2+4z^2\le 8$

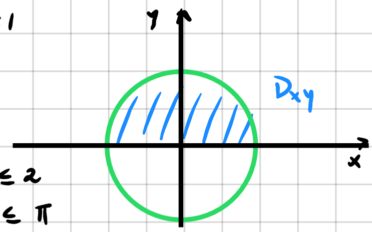
$z^2\le \frac{8-(x^2+y^2)}{4}$

$z\le \sqrt{2-\frac{(x^2+y^2)}{4}}$

↳ Dxy es la proyección al plano xy de la intersección entre $z=1$ y el elipsoide, con $y\ge 0$

$x^2+y^2+4z^2\le 8$, $z=1$

$x^2+y^2\le 4$



$\begin{cases} x=r\cos(\theta) \\ y=r\,sen(\theta)\end{cases}$, $0\le r\le 2$, $0\le\theta\le\pi$

$|J(r,\theta)| = r$

$$\iiint_H yz\,dxdydz = \iint_{D_{xy}} dxdy\int_1^{\sqrt{\frac{8-(x^2+y^2)}{4}}} yz\,dz$$

$$= \iint_{D_{xy}} \frac{yz^2}{2}\Big|_1^{\sqrt{\frac{8-(x^2+y^2)}{4}}} dxdy = \frac{1}{2}\iint_{D_{xy}} y\left(2-\frac{(x^2+y^2)}{4}-1\right)dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\iint_{D_{xy}} y\left(1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}\right)dxdy = \frac{1}{2}\int_0^2\int_0^\pi r\,sen(\theta)\left(1-\frac{r^2}{4}\right).r\,d\theta dr$$

$$\frac{1}{2}\int_0^2 r^2\left(1-\frac{r^2}{4}\right).\left[-\cos(\theta)\Big|_0^\pi\right]dr = \frac{1}{2}\int_0^2 r^3\left(1-\frac{r^2}{4}\right)2\,dr = \int_0^2 r^3-\frac{r^3}{4}\,dr = \frac{r^4}{4}-\frac{r^6}{24}\Big|_0^2 = \frac{4}{3}$$

- **Ejercicio 2.** Calcular $\int_C \vec{f}\cdot d\vec{s}$, siendo

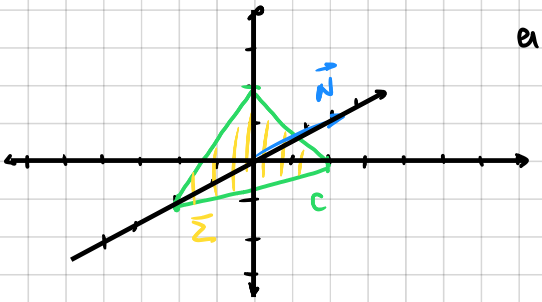
$$\vec{f}(x,y,z) = (2xy^3z^2 - y, 3x^2y^2z^2 + \varphi(y), 2x^2y^3z), \quad \varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$$

y C el borde de la superficie

$$\Sigma : x+y+z=2,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0.$$

Indique en un gráfico el sentido de recorrido elegido para el cálculo.

- Gráfico tipo de análisis



$\Sigma = x+y+z=2, \underbrace{x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0}$

es una porción de un plano en primer cuadrante

↳ C es una curva cerrada y frontera de una porción de plano. Normalmente

$$\oint_{C^+} \vec{f}\, d\vec{s} = \int f(\vec{\rho}(t))\cdot\vec{\rho}'(t)\, dt \quad \text{pero}$$

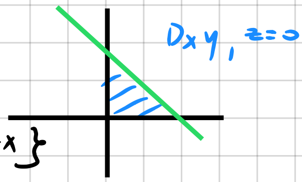
también $\oint_{C^+} \vec{f}\cdot ds = \iint_\Sigma \operatorname{rot}(\vec{f})\, \check{n}\, d\sigma$ por stokes

ya que f muy complejo

- parametrizar superficie $x+y+z=2$

$\vec{\sigma}(x,y) = (x, y, 2-x-y)$

$(x,y) \in D = \{0\leq x\leq 2,\ 0\leq y\leq 2-x\}$



↳ $\vec{N} = \vec{\sigma}_x' \times \vec{\sigma}_y' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1,1,1)$

- Hallar $\operatorname{rot}(\vec{f})$ $\quad \vec{f}(x,y,z) = (2xy^3z^2 - y, 3x^2y^2z^2 + \varphi(y), 2x^2y^3z),$

$$\operatorname{rot}(\vec{f}) = \nabla\times\vec{f} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(3y^2 2x^2 z - 2z\,3x^2y^2,\ 2z\,2xy^3 - 4xy^3z,\ 6xy^2z^2 - (3y^2 2xz^2 - 1)\right)$$
$$= (0,0,1)$$

- Calcular circ $\vec{f}$ en C

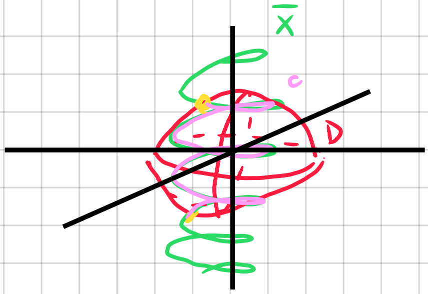
$$\oint_{C^+} \vec{f}\cdot ds = \iint_\Sigma \operatorname{rot}(\vec{f})\, \check{n}\, d\sigma = \iint_D (0,0,1)(1,1,1)\, dx\,dy = \iint_D dx\,dy = \int_0^2\int_0^{2-x} dy\,dx = \int_0^2 2-x\, dx = 2x - \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 2$$

- **Ejercicio 3.** Sea Γ el arco de de la curva de ecuación

$$\vec{X} = (\cos(\pi t), \operatorname{sen}(\pi t), t), \quad t \in \mathbb{R}$$

contenido en la región $D : x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 3$. Calcule la longitud de Γ.

• Gráfico (fig de análisis)



→ hay que hallar long del hélice que se encuentra contenido por el elipsoide

∘ Hallar los puntos de intersección entre hélice y elipsoide

- hélice : $\rho(t) = (\cos(\pi t), \operatorname{sen}(\pi t), t)$
- elipsoide $x^2+y^2+2z^2=3$ (frontera)

↳ $\cos^2(\pi t) + \operatorname{sen}^2(\pi t) + 2t^2 = 3$

$2t^2 = 3-1 = 2$ ⟶ $t_1 = 1$, $t_2 = -1$

$C = \rho(t) = (\cos(\pi t), \operatorname{sen}(\pi t), t), -1 \leq t \leq 1$

fórmula long de una curva

$$\text{long}(c) = \int_{t_1}^{t_2} |\rho'(t)|\, dt = \int_{-1}^{1} |\rho'(t)|\, dt$$

$$\rho'(t) = (-\pi \operatorname{sen}(\pi t), \pi\cos(\pi t), 1)$$

$$|\rho'(t)| = \sqrt{(-\pi\operatorname{sen}(\pi t))^2 + (\pi\cos(\pi t))^2 + 1} = \sqrt{\pi^2(\cos^2(\pi t) + \operatorname{sen}^2(\pi t)) + 1} = \sqrt{\pi^2+1}$$

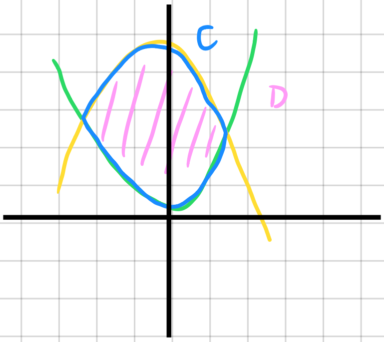
$$\int_{-1}^{1} |\rho'(t)|\, dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{\pi^2+1}\, dt = \sqrt{\pi^2+1}\; t \Big|_{-1}^{1} = 2\sqrt{\pi^2+1}$$

- **Ejercicio 4.** Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x,y) = (y^2 + h(y), xh'(y) + \cos(y))$, siendo $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, a lo largo del borde de la región

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$$

recorrido en sentido horario.

∘ Gráfico fig análisis,



sabemos que

$$\oint_{C^-} \vec{f}\, d\vec{s} = -\oint_{C^+} \vec{f}\, d\vec{s}$$

en este caso quiero calcular $\oint_{C^-} \vec{f}\, d\vec{s}$

al modo típico

$$\oint_C \vec{f}\, d\vec{s} = \int \vec{F}(g(t)) \cdot g'(t)\, dt$$

pero como no sabemos h, vamos con Green

$$\oint_{C^-} \vec{f}\, d\vec{s} = -\oint_{C^+} \vec{f}\, d\vec{s} = -\iint_D (Q'_x - P'_y)\, dx\,dy$$

∘ Hallar $Q'_x - P'_y$

$Q'_x = h'(y)$ → $Q'_x - P'_y = h'(y) - 2y - h'(y) = -2y$

$P'_y = 2y + h'(y)$

∘ $D = \{x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$

x varía en intersección

$y = x^2$ con $y = 2 - x^2$

$x^2 = 2 - x^2$

$x^2 = 1$ → $x = 1 \lor x = -1$

∘ Calcular flujo

$$\oint_{C^-} \vec{f}\, d\vec{s} = -\oint_{C^+} \vec{f}\, d\vec{s} = -\iint_D (Q_x - P'_y)\, dx\,dy = -\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{2-x^2} -2y\, dy\, dx = \int_{-1}^{1} y^2 \Big|_{x^2}^{2-x^2} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (2-x^2)^2 - x^4\, dx = \int_{-1}^{1} 4 - 4x^2 + x^4 - x^4\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} 4 - 4x^2\, dx = 4x - \frac{4x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \left(4 - \frac{4}{3}\right) - \left(-4 + \frac{4}{3}\right) = \frac{16}{3}$$

- **Ejercicio 5.** Sea Γ la porción de la línea del campo vectorial $\vec{g}(x,y) = (9y, -x)$ que pasa por $(0,1)$ y está contenida en el semiplano $x - 3y \leq 0$.

  Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x,y) = (x + xy^2, 2 + x^2y)$ a lo largo de Γ. Indique en un gráfico el sentido de recorrido empleado en el cálculo.

- hallar $\Gamma = (x(t), y(t))$

$$g(x(t), y(t)) = (9y, -x) = (\overset{\Gamma'}{x'(t), y'(t)})$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 9y \longrightarrow dt = \frac{dx}{9y} \\ \frac{dy}{dt} = -x \longrightarrow dt = \frac{dy}{-x} \end{cases} \longrightarrow \frac{dx}{9y} = \frac{dy}{-x}$$

$$-x\,dx = 9y\,dy$$

$$-\int x\,dx = \int 9y\,dy$$

$$\boxed{\frac{9y^2}{2} = \frac{-x^2}{2} + k, \quad k \in \mathbb{R}}$$

$(0,1)$

$$\boxed{\frac{9}{2} = k}$$

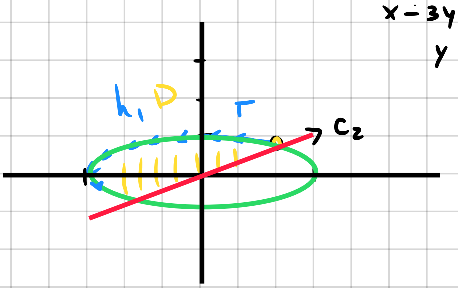
$$\hookrightarrow \frac{9}{2}y^2 + \frac{x^2}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\frac{x^2}{3^2} + y^2 = 1 \quad \text{(elipse)}$$

- gráfico de análisis

$x - 3y \leq 0$

$y \geq \frac{1}{3}x$



calcular $\int_\Gamma \vec{f}\,d\vec{s} = \int_{t_1}^{t_0} f(h(t)), h'(t)\,dt$

$$\int_\Gamma \vec{f}\,d\vec{s} = \oint_{\partial D^+} \vec{f}\,d\vec{s} - \int_C \vec{f}\,ds = \iint_D (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy - \int_C f\,d\vec{s}$$

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ \frac{x^2}{3^2} + y^2 \leq 1, \ \frac{1}{3}x \leq y \right\} \longrightarrow \begin{cases} x = 3r\cos(\theta) \\ y = r\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases}, \quad \begin{aligned} &0 \leq r \leq 1 \\ &\tfrac{3}{3} r\cos(\theta) \leq r\,\mathrm{sen}(\theta) \\ &1 \leq \mathrm{tg}(\theta) \\ &\tfrac{5\pi}{4} \leq \theta \leq \tfrac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{Q'_x - P'_y = 2xy - 2xy = 0}$$

$$\downarrow$$

$$\iint_D 0\,dx\,dy = 0$$

$$\downarrow$$

$$\int_\Gamma \vec{f}\,d\vec{s} = -\int_C \vec{f}\,ds \longrightarrow \text{donde } C = \left\{ y = \frac{1}{3}x, \ -\frac{3\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{3\sqrt{2}}{2} \right\}$$

$$\frac{x^2}{3^2} + y^2 = 1 \quad \frac{2x^2}{9} = 1 \longrightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$x_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$m(t) = (t, \tfrac{1}{3}t), \quad -\frac{3\sqrt{2}}{2} \leq t \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\int_\Gamma \vec{f}\,d\vec{s} = -\int_C \vec{f}\,d\vec{s} = \int_{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \vec{f}(m(t))\cdot m'(t)\,dt = \int_{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \left(t + \frac{t^3}{9}, 2 + \frac{t^3}{3}\right)\left(1, \frac{1}{3}\right) dt$$

$$f(m(t)) = \left(t + \frac{t^3}{9}, 2 + \frac{t^3}{3}\right)$$

$$m'(t) = (1, \tfrac{1}{3})$$

$$\int_{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} t + \frac{t^3}{9} + \frac{2}{3} + \frac{t^3}{9}\,dt = \int_{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} t + 2\frac{t^3}{9} + \frac{2}{3}\,dt$$

$$\frac{t^2}{2} + \frac{2t^4}{36} + \frac{2}{3}t \Big|_{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} = \frac{27 + 8\sqrt{2}}{4}$$