

9/11/2025

FIUBA

Análisis Matemático II - Segundo Parcial

28-6-2025

Nombre y Apellido: Ian Chen

Número de Padrón: 113249

Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas. No se aceptarán cálculos dispersos, poco claros o sin comentarios. En la resolución de integrales, cada paso de integración debe resolverse indicando la primitiva y los límites correspondientes.

La evaluación se aprueba con 3 (tres) ejercicios bien resueltos.

Tema 2

- B
- **Ejercicio 1.** Sea $H \subset \mathbb{R}^3$ la región contenida en el primer octante que se encuentra limitada inferiormente por el plano xy y superiormente por la superficie de ecuación $3x^2 + 3y^2 + z = 12$. Grafique H y calcule

$$\iiint_H y^2 dx dy dz.$$

- **Ejercicio 2.** Sea C la curva definida por

$$x^2 + y^2 = 4, \quad y^2 - z = 0, \quad x \geq 0.$$

B

Calcule $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$, siendo $\vec{f}(x, y, z) = (yze^x, y + ze^x, ye^x)$. Indique en un gráfico la orientación de C empleada en el cálculo.

- Faltan los hipotenús del triángulo
- **Ejercicio 3.** Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (y^2 + h(3x + 3y), h(3x + 3y) - e^y)$, con $h \in C^1(\mathbb{R})$, a lo largo del borde del triángulo de vértices $A = (0, 3)$, $B = (3, 0)$ y $C = (3, 6)$, recorrido en el sentido $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$.

- **Ejercicio 4.** Considere la superficie

$$\Sigma: \quad z + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 - 2y \leq 0$$

B

orientada de modo tal que las normales tengan tercera componente negativa. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (xyz, 1, 1 - 2y)$ a través de Σ .

- **Ejercicio 5.** Halle $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ para que el campo vectorial

$$\vec{f}(x, y, z) = (y + \varphi(x), x - y, x - z\varphi(x))$$

Faltan los hipotenús del triángulo

satisfaga simultáneamente las siguientes condiciones:

a) $\vec{f}(0, 1, 1) = (2, -1, -1);$

b) el flujo de $\vec{f}$ a través de la frontera de cualquier bola cerrada sea nulo.

28/10/2025.

Parcial II Análisis matemático - I.

* Ejercicio 1

$H =$ - primer octante ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$)
- Superior al plano xy .
- Interior a $3x^2 + 3y^2 + z = 12$

o Analizar las condiciones.

$$3x^2 + 3y^2 + z = 12$$

$$\text{Entonces } z = 12 - 3(x^2 + y^2)$$

un paraboloide "inverso".

o Analizar

~~H es el interior del paraboloide~~
 H es el conjunto de puntos

(x, y, z) en $\mathbb{R}^3$ delimitado por el un cuarto del paraboloide en 1er oct.
(y el plano xy) $\rightarrow$ redundante porque si está en 1er octante es superior al plano xy

~~Se sabe que H es superior~~ o Hallar límites de integración

$\rightarrow$ como un punto superior al plano xy ,

entonces $z \geq 0$ y como punto inferior al paraboloide,

$$\text{entonces } z \leq 12 - 3(x^2 + y^2)$$

$\rightarrow$ finalmente límites de integración de z es:

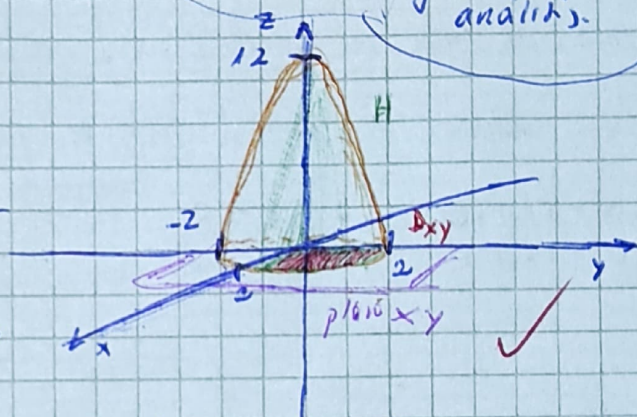
$$0 \leq z \leq 12 - 3(x^2 + y^2)$$

~~Se sabe~~ $\rightarrow$ entonces

$$\iiint_H x^2 dx dy dz = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_0^{12-3(x^2+y^2)} x^2 dz$$

$\rightarrow$ falta encontrar D_{xy}

o Gráfico "H" aproximado
Figura de análisis.



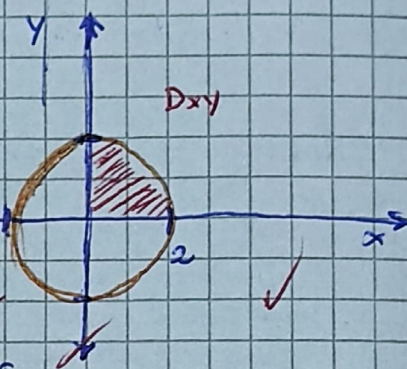
↳ Dxy es la intersección del paraboloide con plano xy ($z=0$)
y delimitado $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

$$z \leq 12 - 3(x^2 + y^2), \quad z \geq 0$$

$$0 \leq 12 - 3(x^2 + y^2)$$

$$x^2 + y^2 \leq 4, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

o Gráfico Dxy



Como es una circunferencia (círculo) ^{mejor} ~~la misma~~
podemos cambiar a coordenadas polares para integrar

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}, \quad \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 \leq 4$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

y el jacobiano

$$|J(r, \theta)| = r$$

o Integrar -

$$\iiint_H dx dy dz = \iiint_{Dxy} \int_0^{12-3(x^2+y^2)} dz = \iint_{Dxy} y^2 dx dy \int_0^{12-3(x^2+y^2)} dz = \iint_{Dxy} y^2 \cdot z \Big|_0^{12-3(x^2+y^2)} dx dy$$

$$= \iint_{Dxy} y^2 (12 - 3(x^2 + y^2)) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r^2 \sin^2 \theta (12 - 3r^2) \cdot r dr d\theta$$

$$= \int_0^2 r^3 (12 - 3r^2) dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta$$

multiplicación de
don. Integrals
separadas

↳ (otra hoja)

$$\int_0^2 r^3 (12 - 3r^2) dr$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \left(\frac{1}{2} + \cos(2\theta)\right) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} - \cos(2\theta) d\theta = \left[\frac{1}{2}\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Calculando $\iiint_H y^2 dx dy dz$

llego a $\int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin^2 \theta (12 - 3r^2) \cdot r d\theta dr$

que puedo interpretar como dos integrales separadas.

~~$\int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin^2 \theta (12 - 3r^2) d\theta dr$~~

$$\int_0^2 r^3 (12 - 3r^2) dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\theta) d\theta$$

Calculo
por separado
y multiplico
después

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \theta - \frac{\sin(2\theta)}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 r^3 (12 - 3r^2) dr &= \int_0^2 (12r^3 - 3r^5) dr \\ &= \left[\frac{12r^4}{4} - \frac{3r^6}{6} \right]_0^2 = 3r^4 - \frac{r^6}{2} \Big|_0^2 = 16 \end{aligned}$$

Finalmente

$$\int_0^2 r^3 (12 - 3r^2) dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4} \cdot 16 = 4\pi$$

por lo que

$$\iiint_H y^2 dx dy dz = 4\pi \quad \checkmark$$

* Ejercicio 2

$$C: x^2 + y^2 = 4, y^2 - z = 0, x \geq 0.$$

• Analizar situación:

C es curva generada por la intersección entre cilindro circular $x^2 + y^2 = 4$ ~~donde~~ ~~paraboloide~~ ~~$y^2 - z = 0$~~ con cilindro parabólico $y^2 - z = 0$, con $x \geq 0$

• Hallar C.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \rightarrow x^2 + z = 4 \rightarrow x^2 = 4 - z. \\ y^2 - z = 0 \rightarrow y^2 = z. \end{cases}$$

$$|x| = \sqrt{4 - z}.$$

$$x = \begin{cases} \sqrt{4 - z} & \text{si } x \geq 0 \\ -\sqrt{4 - z} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Con esto ya podríamos

parametrizar la curva, pero me saltó graficar para saber qué estoy haciendo

• Graf.: (fig. online)

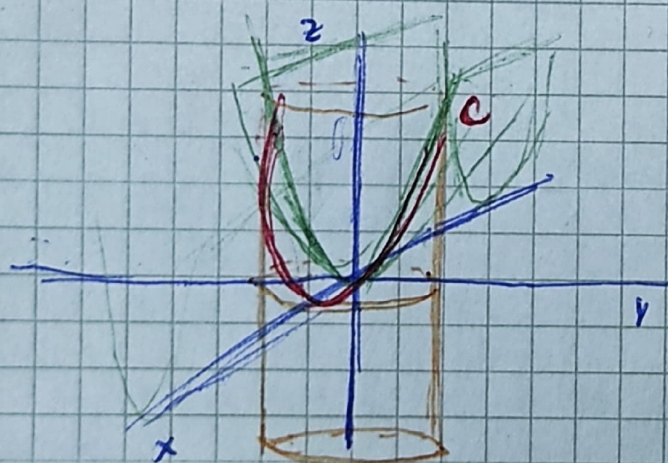
• parametrizar con curva C

$$C: \vec{p}(t) = (\sqrt{4 - y^2}, y, y^2).$$

$$\vec{p}(t) = (\sqrt{4 - t^2}, t, t^2).$$

$$\text{donde } 4 - t^2 \geq 0.$$

$$t^2 \leq 4 \rightarrow -2 \leq t \leq 2$$



para calcular $\int_C \vec{F} d\vec{s} = \int_{-2}^2 \vec{F}(\vec{p}(t)) \cdot \vec{p}'(t) dt$

pero $f(x, y, z) = (yze^x, y + ze^x, ye^x)$ es muy compleja.

Puedo ver si f es campo de gradiente y $\int_C \vec{F} d\vec{s} = \phi(\vec{p}(t_1)) - \phi(\vec{p}(t_2))$

• $\vec{F} = \nabla \phi$ donde $\nabla \phi = \vec{F}$

Verificar si $\vec{F} = (yze^x, y+ze^x, ye^x) = (P, Q, R)$ es campo de gradiente.

↳ Dom(f) es simplemente conexo

↳ verificar $\text{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$

$$\text{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (e^x - e^x, ye^x - ye^x, ze^x - ze^x) = (0, 0, 0).$$

Como $\text{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$ entonces f es conservativo.

◦ Hallar función potencial ϕ .

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = R = ye^x \rightarrow \phi = \int ye^x dz = zye^x + \alpha_1(x) + \alpha_2(y).$$

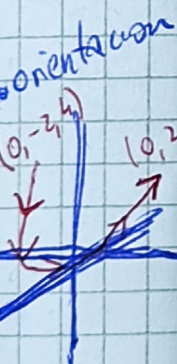
$$\hookrightarrow (\text{hallar } \alpha_1(x)) \rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x} = zye^x + \alpha_1'(x) = P = yze^x$$

$$\alpha_1'(x) = 0 \rightarrow \alpha_1(x) = 0$$

$$\hookrightarrow (\text{Hallar } \alpha_2(y)) \rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial y} = ze^x + \alpha_2'(y) = Q = y + ze^x$$

$$\alpha_2'(y) = y \rightarrow \alpha_2(y) = \int y dy = \frac{y^2}{2}$$

$$\text{finalmente} = \phi(x, y, z) = zye^x + \frac{y^2}{2} + C$$



$$\circ \text{ Cálculo. } \int_C \vec{F} d\vec{s} = \int_{-2}^2 f(\vec{p}(t)) \vec{g}'(t) dt = \underbrace{\phi(\vec{p}(2))}_{10} - \underbrace{\phi(\vec{p}(-2))}_{-6}$$

$$\vec{p}(2) = (0, 2, 4) \rightarrow \phi(0, 2, 4) = 4 \cdot (2) \cdot 1 + 2 = 10$$

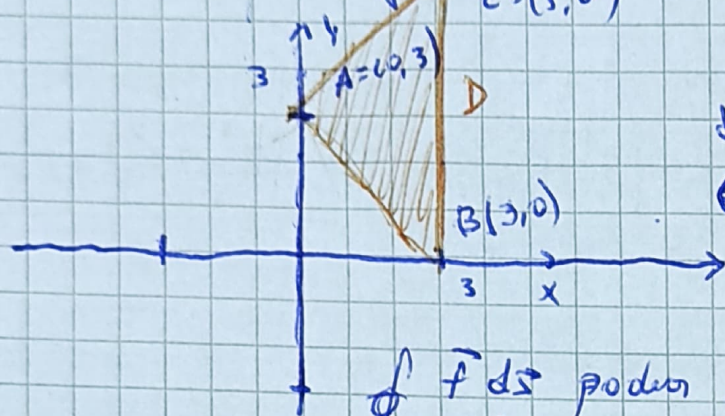
$$\vec{p}(-2) = (0, -2, 4) \rightarrow \phi(0, -2, 4) = 4 \cdot (-2) \cdot 1 + 2 = -6$$

$$\oint \vec{F} d\vec{s} = \phi(\vec{p}(2)) - \phi(\vec{p}(-2)) = 10 - (-6) = 16$$

* Ejercicio 3 $f(x, y) = (y^2 + h(3x+3y), h(3x+3y) - e^y)$.

triángulo. $A = (0, 3)$, $B = (3, 0)$, $C = (3, 6)$.

• Gráfico. triángulo.



Queremos calcular.

$\oint_{\partial D^-} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ que es el

opuesto de $\oint_{\partial D^+} \vec{F} \cdot d\vec{s}$

pero para ~~ello~~ calcular.

$\oint_{\partial D^+} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ podemos usar teorema Green.

$$\oint_{\partial D^+} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_D (Q'_x - P'_y) dx dy$$

¿Cuáles son las hipótesis del teorema?

entonces

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oint_{\partial D^-} \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \oint_{\partial D^+} \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \iint_D (Q'_x - P'_y) dx dy.$$

• Desde el gráfico podríamos definir D como:

$$D = \{ 0 \leq x \leq 3, 3-x \leq y \leq 3+x \}$$

• Hallamos $Q'_x - P'_y$

$$Q'_x = 3h'(3x+3y), \quad Q'_x - P'_y = 3h'(3x+3y) - (2y + 3h'(3x+3y))$$

$$P'_y = 2y + 3h'(3x+3y), \quad \therefore Q'_x - P'_y = -2y$$

• Finalmente

$$\iint_D (Q'_x - P'_y) = \int_0^3 \int_{3-x}^{3+x} -2y dy dx \quad \rightarrow \text{siguiente hoja}$$

o Calculo. $\oint_{\partial D^+} \vec{F} d\vec{s}$.

$$\oint_{\partial D^+} \vec{F} d\vec{s} = \iint_D (Q' - P') dx dy = \int_0^3 \int_{3-x}^{3+x} -2y dy dx.$$

$$= \int_0^3 -y^2 \Big|_{(3-x)}^{3+x} dx = - \int_0^3 ((3+x)^2 - (3-x)^2) dx$$

$$= - \int_0^3 (3^2 + 6x + x^2 - (3^2 - 6x + x^2)) dx.$$

$$= - \int_0^3 \cancel{3^2} + 6x + x^2 - \cancel{3^2} + 6x - x^2 dx = - \int_0^3 12x dx = -6x^2 \Big|_0^3 = -54$$

o Invertir orientacion

finalmente temos $\oint_{\partial D^+} \vec{F} d\vec{s} = -54$.

$$\hookrightarrow \oint_C \vec{F} d\vec{s} = - \oint_{\partial D^+} \vec{F} d\vec{s} = -(-54) = 54$$

$$\oint_C \vec{F} d\vec{s} = 54.$$

* Ejercicio 4. $\Sigma = z + y^2 = 4, \quad x + y^2 - 2y \leq 0$
 $f(x, y, z) = (xy, z, 1, 1-2y)$.

• Analizar probl.

la consigna pide calc. $\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\vec{r} = \iint_D f(\vec{r}) \vec{n} \, dxdy$

• Analizar ec. Σ

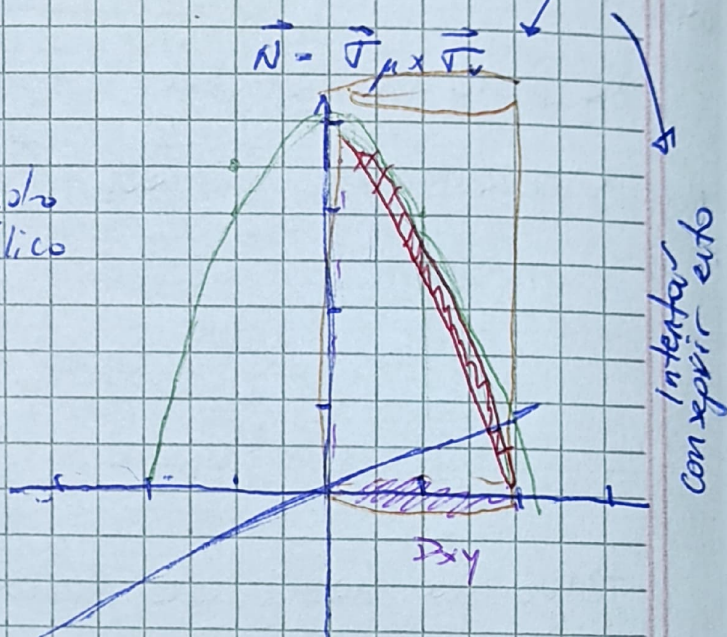
$\Sigma \hat{=} z + y^2 = 4 \rightarrow z = 4 - y^2 \rightarrow$ cilindro parabólico

$x^2 + y - 2y \leq 0$

$x^2 + y^2 - 2y + 1 - 1 \leq 0$

$x^2 + (y-1)^2 \leq 1$

cilindro circular
radio 1
centro (0,1)



observación la intersección de las superficies. ✓

da un pedazo de Σ cuyo dominio está limitado por D_{xy} que no es nada más ni nada menos que $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$.

↳ entonces $\vec{r} = (x, y, 4 - y^2)$, donde $(x, y) \in \{x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$

• hallar $\vec{N}$

$\vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = (0, 2y, 1)$

como pide $\vec{N}$ negativo
entonces

$-(\vec{r}_x \times \vec{r}_y) = (0, -2y, -1)$

o: Hallar $\vec{f}(\vec{r}(x,y))$

$$\vec{f}(\vec{r}(x,y)) = (x \cdot y \cdot (4-y^2), 1, 1-2y)$$

Una vez que tenemos $\vec{N}$ y $\vec{f}(\vec{r}(x,y))$
calculamos la integral

$$\begin{aligned} \iint_D \vec{f}(\vec{r}) \cdot \vec{N} \, dx \, dy &= \iint_D (x \cdot y \cdot (4-y^2), 1, 1-2y) \cdot (0, -2y, -1) \, dx \, dy \\ &= \iint_D -2y - 1 + 2y \, dx \, dy = \iint_D -1 \, dx \, dy = - \iint_D dx \, dy \end{aligned}$$

donde D es $D = \{x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$. parametrizar.

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta + 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{matrix}$$

$$J(1,0) = \begin{vmatrix} x & y \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

$$= - \iint_D dx \, dy = - \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \, d\theta \, dr = -2\pi \int_0^1 r \, dr = -2\pi \frac{r^2}{2} \Big|_0^1 = -\pi$$

área de un círculo.

RTA: el fluj. de f en Σ es $\boxed{-\pi}$

* Ejercicios

$$f(x, y, z) = (y + \varphi(x), x - y, x - z\varphi(x)).$$

↳ Hallar $\varphi(x)$ con condiciones:

↳ (a) $\vec{F}(0, 1, 1) = (2, -1, -1)$

(b) Flujo $\vec{F}$ en cualquier ^{front} bola cerrada es nulo

• Analizar condiciones.

↳ $\vec{F}(0, 1, 1) = (1 + \varphi(0), -1, -\varphi(0)) = (2, -1, -1).$

$$\begin{cases} 1 + \varphi(0) = 2 \\ -1 = -1 \\ -\varphi(0) = -1 \end{cases} \rightarrow \boxed{\varphi(0) = 1} \checkmark$$

↳ "flujo $\vec{F}$ en cualquier ^{front} bola cerrada es nulo."

El flujo $\vec{F}$ en cualquier superficie cerrada es

$\oint_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\vec{\sigma}$. pero esto según teorema de Gauss
hipótesis?

se puede calcular como

$$\oint_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\vec{\sigma} = \iiint_D \text{div}(\vec{F}) \, dx \, dy \, dz$$

pero

si el flujo $\vec{F}$ nulo en cualquier bola cerrada entonces

$$\oint_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\vec{\sigma} = \iiint_D \text{div}(\vec{F}) \, dx \, dy \, dz = 0$$

lo que implica que $\boxed{\text{div}(\vec{F}) = \nabla \cdot \vec{F} = 0}$

• Hallar $\text{div}(\vec{F}) = \nabla \cdot \vec{F} = 0$

$$\text{div}(\vec{F}) = \nabla \cdot \vec{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (y + \varphi(x), x - y, x - z + \varphi(x)) = 0$$

$$= \varphi'(x) + (-1) - \varphi(x) = 0.$$

no queda una ecuación diferencial, resolver para hallar $\varphi(x)$

$$\varphi'(x) - 1 - \varphi(x) = 0.$$

$$\varphi'(x) - \varphi(x) = 1, \quad P = (-1) \cdot \int P dx = -x \cdot e^{\int P dx} = e^{-x}$$

$$e^{-x} \varphi'(x) - e^{-x} \varphi(x) = e^{-x}$$

$$(e^{-x} \varphi(x))' = e^{-x}$$

$$e^{-x} \varphi(x) = \int e^{-x} dx = -e^{-x} + k.$$

$$\varphi(x) = \frac{-e^{-x} + k}{e^{-x}} = -1 + \frac{k}{e^{-x}}$$

$$\varphi(x) = -1 + \frac{k}{e^{-x}} = -1 + k e^x$$

para hallar k , sabemos que $\varphi(0) = 1$

$$\text{entonces } \varphi(0) = -1 + k e^0 = 1.$$

$$\boxed{k = 2}$$

$$\boxed{\varphi(x) = 2e^x - 1}$$

↓ chequeo $\varphi'(x) - \varphi(x) - 1 = 0$ ✓

$$\varphi'(x) = 2e^x \quad \checkmark$$

$$2e^x - 1 - (2e^x - 1) = 0 \quad \checkmark$$