15/5/25

Tema 1

- **Ejercicio 1.** Sea D el dominio de

$$\vec{f}(x,y) = \left(1 + \ln(xy), \sqrt{3 - x^2 + 2x - 4y^2}\right).$$

  1. Grafique D, su frontera y su interior.
  2. Determine si D es abierto, cerrado, acotado y/o conexo.

- **Ejercicio 2.** Sea

$$f(x,y) = \mathbf{a}[(x-2)^2 + 2y] + \mathbf{b}[(y+1)^2 - 2x^3] + 8x - 4y, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}.$$

  Halle los valores de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ para que f tenga un punto crítico en $(1,0)$ y clasifíquelo.

- **Ejercicio 3.** Pruebe que la ecuación

$$3zy - \cos(z)x + yx^2 = 0$$

  define implícitamente una función $x = f(y,z)$ de clase $\mathcal{C}^1$ en un entorno de $(y_0, z_0) = (1,0)$ tal que $f(y_0, z_0) = x_0 > 0$. Calcule aproximadamente $f(0.95, 0.02)$ mediante una aproximación lineal.

- **Ejercicio 4.** Sea $g(x,y) = f(x+y, x^3y^2)$ con $f(r,s)$ un campo escalar de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.
  Se sabe que $f(0,1) = 1$ y que $f'((0,1), \breve{v}) = \sqrt{2}$ y $f'((0,1), \breve{u}) = 2\sqrt{2}$ cuando $\breve{v} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ y $\breve{u} = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$.
  Halle una ecuación del plano tangente al gráfico de g en el punto $(1, -1, g(1,-1))$.

- **Ejercicio 5.** Sean Σ la superficie de ecuación $x + (y-1)^2 + z^2 = 3$ y Γ la curva definida por las ecuaciones

$$\begin{cases} y^2 - 2y - x + 1 = 0 \\ y - z = 1 \end{cases}.$$

  1. Encuentre los puntos donde se intersecan Σ y Γ.
  2. Para cada punto P hallado en el ítem 1, encuentre la recta tangente a Γ en P.

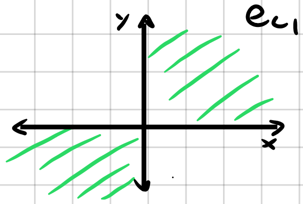
- **Ejercicio 1.** Sea D el dominio de

$$\vec{f}(x,y) = \left(1 + \ln(xy), \sqrt{3 - x^2 + 2x - 4y^2}\right).$$

1. Grafique D, su frontera y su interior.
2. Determine si D es abierto, cerrado, acotado y/o conexo.

- Hallar Dom f $\curvearrowright$ restringir valores no permitidos de (x,y)

$$\exists\ f: \begin{cases} ec_1 = 1 + \ln(xy) \longrightarrow x, y > 0 \longrightarrow \left.\begin{matrix} x>0 \wedge y>0 \\ x<0 \wedge y<0 \end{matrix}\right\} \longrightarrow \\ ec_2 = \sqrt{3 - x^2 + 2x - 4y^2} \longrightarrow 3 - x^2 + 2x - 4y^2 > 0 \end{cases}$$



(x,y) puntos del primer y tercer cuadrante

Dom f = $ec_1 \cap ec_2$

↳ restringir ec_2 $\quad 3 - x^2 + 2x - 4y^2 > 0$

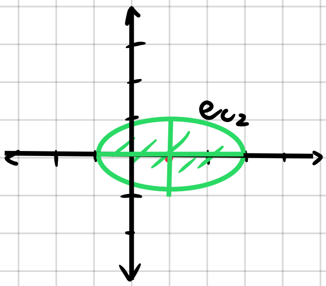
$$3 - (x^2 - 2x) - 4y^2 > 0$$

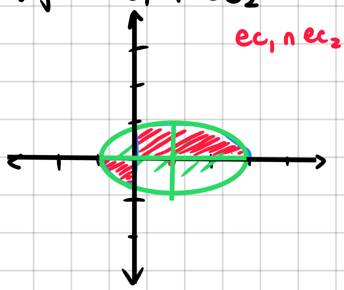
$$-(x^2 - 2.x + 1 - 1) - 4y^2 > -3$$

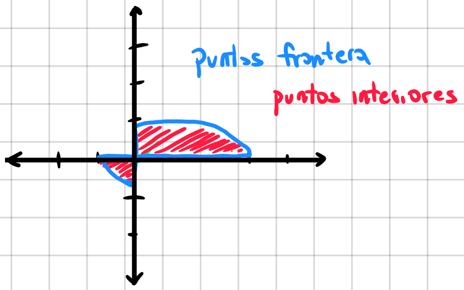
$$-[(x-1)^2 - 1] - 4y^2 > -3$$

$$-(x-1)^2 - 4y^2 > -4 \longrightarrow \underbrace{\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{1} < 1}$$

↪ elipse centro $(1,0)$, $a = 2$, $b = 1$







② clasificar conjunto Dom f

↳ Dom f es un conjunto abierto ya que todos sus puntos son interiores

$$\text{Dom } f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy > 0 \wedge \frac{(x-1)^2}{4} + y^2 < 1\right\}$$

↳ Dom f es un conjunto acotado ya que existe Bola abierta centrada en $(0,0)$ con radio finito que contiene Dom f $\Rightarrow$ Dom f $\subseteq B((0,0), r)$. $r \in \mathbb{R}$

$\downarrow$

por ejemplo $B((0,0), 10)$

↳ Dom f No es conexo

ya que la figura $\rightarrow$ el gráf de Dom f no está unida en una sola pieza

- **Ejercicio 2.** Sea

$$f(x,y) = \mathbf{a}[(x-2)^2 + 2y] + \mathbf{b}[(y+1)^2 - 2x^3] + 8x - 4y, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}.$$

Halle los valores de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ para que f tenga un punto crítico en $(1,0)$ y clasifíquelo.

↳ Para que un punto P sea crítico, entonces $\nabla f(P) = 0$

↳ Hallar $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ para que $P = (1,0)$ $\nabla f(P) = 0$

- Hallar $\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(a\left[(x-2)^2 + 2y\right] + b\left[(y+1)^2 - 2x^3\right] + 8x - 4y \right)$$

$$= a \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[(x-2)^2 + 2y\right] + b \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[(y+1)^2 - 2x^3\right] + 8$$

$$= a \cdot 2(x-2) + b(-6x) + 8$$

$$\nabla f(x,y) = \left(2a(x-2) - 6bx + 8,\ 2a + 2b(y+1) - 4\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(a\left[(x-2)^2 + 2y\right] + b\left[(y+1)^2 - 2x^3\right] + 8x - 4y \right)$$

$$= a \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left[(x-2)^2 + 2y\right] + b\frac{\partial}{\partial y}\left[(y+1)^2 - 2x^3\right] - 4$$

$$= 2a + 2b(y+1) - 4$$

$a = 1$ y $b = 1$

$$\nabla f(x,y) = \left(2(x-2) - 6x + 8,\ 2 + 2(y+1) - 4\right)$$

- Hallar $a, b \in \mathbb{R}$ para $\nabla f(1,0) = (0,0)$

$$\begin{cases} -2a - 6b + 8 = 0 & ec_1 \\ 2a + 2b - 4 = 0 & ec_2 \to ec_2 + ec_1 \end{cases} \to \begin{cases} -2a - 6b + 8 = 0 \to -2a - 6 + 8 = 0 \to -2a + 2 = 0 \to \boxed{a = 1} \\ -4b + 4 = 0 \to b = (-4)/(-4) = 1 \to \boxed{b = 1} \end{cases}$$

- Clasificar extremo? → buscar H_f

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \to H_f(1,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

como $\det(H_f(P)) = -8 < 0$ entonces el gráf de f en P no es un extremo, sino punto silla

- **Ejercicio 3.** Pruebe que la ecuación

$$3zy - \cos(z)x + yx^2 = 0$$

define implícitamente una función $x = f(y,z)$ de clase $\mathcal{C}^1$ en un entorno de $(y_0, z_0) = (1,0)$ tal que $f(y_0, z_0) = x_0 > 0$. Calcule aproximadamente $f(0.95, 0.02)$ mediante una aproximación lineal.

↳ $F(x,y,z) = 3zy - \cos(z)x + yx^2$ → $\text{Dom } F = \mathbb{R}^3$

- Verificar teorema función implícita

(I) $F(x_0, 1, 0) = 3\cdot 0 \cdot 1 - \cos(0)\cdot x_0 + 1\cdot x_0^2 = 0 \longrightarrow x_0^2 - x_0 = x_0(x_0-1) = 0 \longrightarrow \boxed{x_0 = 1} > 0$

↳ F cumple $F(x_0,1,0) = 0$ con $x_0 = 1 > 0$

(II) $\nabla F(x,y,z) = \left(-\cos(z) + 2yx,\ 3z + x^2,\ 3y + \text{sen}(z)x\right)$ → F es C^1 → sus derivadas son continuas en $(x_0, 1, 0)$

(III) $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, 1, 0) = -\cos(0) + 2x_0 \Big|_{x_0 = 1} = -1 + 2 = 1 \neq 0$ ⟹ Existe función $x = f(y,z)$ definida en entorno de $(y_0 z_0) = (1,0)$ donde $x_0 = f(y_0 z_0) = 1 > 0$

→ Hallar aproximación lineal de f en $(1,0)$ para calcular $f(0.95, 0.02)$

$L(y,z) = f(1,0) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)(y-1) + \frac{\partial f}{\partial z}(1,0)(z)$

$L(y,z) = 1 - 1(y-1) - 3(z)$

$L(y,z) = 2 - y - 3z$

$F \to f(y,z),\ y,\ z$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(F(x,y,z)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(0)$

$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{-\partial F}{\partial y}\right) \Big/ \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \left.\frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}\right|_{(1,1,0)} = \frac{-1}{1} = -1$

$\frac{\partial f}{\partial z}(1,0) = \left.\frac{-\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial x}}\right|_{(1,1,0)} = \frac{-3}{1} = -3$

↪ aproximar $f(0.95, 0.02)$

$f(0.95, 0.02) \cong L(0.95, 0.02) = 2 - 0.95 - 3\cdot(0.02) = 0.99$

$f(0.95, 0.02) \cong 0.99$

- **Ejercicio 4.** Sea $g(x,y) = f(x+y, x^3y^2)$ con $f(r,s)$ un campo escalar de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Se sabe que $f(0,1) = 1$ y que $f'((0,1),\check{v}) = \sqrt{2}$ y $f'((0,1),\check{u}) = 2\sqrt{2}$ cuando $\check{v} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ y $\check{u} = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$.

  Halle una ecuación del plano tangente al gráfico de g en el punto $(1,-1,g(1,-1))$.

• Datos

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,/\, h(x,y) = (x+y, x^3y^2)$

$g = f \circ h(x,y) = f(h(x,y))$

$\frac{\partial f}{\partial \mu}(0,1) = \underbrace{\nabla f(0,1)\cdot \check{\mu}}_{2\sqrt{2}}$, $\frac{\partial f}{\partial v}(0,1) = \nabla f(0,1)\cdot \check{v} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow$ Hallar ecuación tangente a gráfico de g en $(1,-1,g(1,-1))$ $\to$ $\underbrace{(x_0,y_0) = (1,-1)}_{A}$

$L(x,y) = g(1,-1) + \frac{\partial g}{\partial x}(1,-1)(x-1) + \frac{\partial g}{\partial y}(1,-1)(y+1)$

$\boxed{h(A) = (0,1)}$

↳ Hallar $\frac{\partial g}{\partial x}(1,-1)$ y $\frac{\partial g}{\partial y}(1,-1)$.

$Dg = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right) \Rightarrow Dg(1,-1) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(1,-1), \frac{\partial g}{\partial y}(1,-1)\right)$

$Dg = D_f \cdot D_h \longrightarrow Dg(1,-1) = D_f(0,1)\cdot D_h(1,-1)$

$Dg(1,-1) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \end{pmatrix}$

• Hallar $D_h(1,-1)$

$D_h = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3x^2y^2 & 2y\,x^3 \end{pmatrix}$

$D_h(1,-1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

∘ Hallar $g(1,-1)$

$g(1,-1) = f(h(1,-1)) = f(0,1) = 1$

• Armar ecuación plano tg a g en punto $(1,-1,g(1,-1))$

$L(x,y) = g(1,-1) + \frac{\partial g}{\partial x}(1,-1)(x-1) + \frac{\partial g}{\partial y}(1,-1)(y+1)$

$= 1 + 0\cdot(x-1) + 5(y+1)$

$z = L(x,y) = 5y+6$

↓ una ecuación de plano tg a g en punto $(1,-1,g(1,-1))$ es $z = 5y+6$

Hallar $D_f(0,1)$

$D_f = \left(\frac{\partial f}{\partial r} \quad \frac{\partial f}{\partial s}\right) = \nabla f(r,s)$

$D_f(0,1) = \left(\frac{\partial f}{\partial r}(0,1) \quad \frac{\partial f}{\partial s}(0,1)\right) = \nabla f(0,1)$

$\frac{\partial f}{\partial \mu}(0,1) = \nabla f(0,1)\cdot \underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{\mu} = 2\sqrt{2}$

$\frac{\partial f}{\partial v}(0,1) = \nabla f(0,1)\underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{v} = \sqrt{2}$

$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial f}{\partial r}(1,0) + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial f}{\partial s} = \sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial f}{\partial r}(1,0) - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial f}{\partial s} = 2\sqrt{2} \end{cases} +$

$= \sqrt{2}\,\frac{\partial f}{\partial r}(1,0) = 2\sqrt{2} + \sqrt{2}$

$\boxed{\frac{\partial f}{\partial r}(1,0) = 3}$ $\boxed{\frac{\partial f}{\partial s}(1,0) = -1}$

- **Ejercicio 5.** Sean Σ la superficie de ecuación $x + (y-1)^2 + z^2 = 3$ y Γ la curva definida por las ecuaciones

$$\begin{cases} y^2 - 2y - x + 1 = 0 \\ y - z = 1 \end{cases}.$$

1. Encuentre los puntos donde se intersecan Σ y Γ.
2. Para cada punto P hallado en el ítem 1, encuentre la recta tangente a Γ en P.

Datos

$\Sigma = x + (y-1)^2 + z^2 = 3$

$T = \begin{cases} y^2 - 2y - x + 1 = 0 \\ y - z = 1 \end{cases}$

- parametrizar curva T

$T = \begin{cases} x = y^2 - 2y + 1 \\ y = y - 1 \end{cases} \rightarrow \vec{g}(y) = (y^2 - 2y + 1, y, y-1)$

- Hallar intersección $\Sigma \cap T \rightarrow$ puntos que cumplen ambas ecuaciones al mismo tiempo

$(y^2 - 2y + 1) - (y-1)^2 + (y-1)^2 = 3$

$3(y-1)^2 = 3$

$y^2 - 2y + 1 = 1$

$y^2 - 2y = y(y-2) = 0 \longrightarrow \underline{y=0} \vee \underline{y=2}$

Punto de intersección en

$\vec{g}(0) = (1, 0, -1)$

$\vec{g}(2) = (1, 2, 1)$

- Hallar tg a T en puntos de intersección

$g'(y) = (2y-2, 1, 1)$

$\rightarrow$ Hallar tg a T en $\vec{g}(0)$

$\vec{r}(\lambda) = \lambda \vec{g}'(0) + \vec{g}(0)$

$\vec{r}_1(\lambda) = \lambda(-2, 1, 1) + (1, 0, -1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\rightarrow$ Hallar tg a T en $\vec{g}(2)$

$\vec{r}_2(\mu) = \mu \vec{g}'(2) + \vec{g}(2)$

$\vec{r}_2(\mu) = \mu(2, 1, 1) + (1, 2, 1)$