8/5/2025

Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas. No se aceptarán cálculos dispersos, poco claros o sin comentarios.

La evaluación se aprueba con 3 (tres) ejercicios bien resueltos.

Tema 1

- **Ejercicio 1.** Sean Σ la superficie de ecuación $x^2y + xz - e^y + z^2 = 0$ y Γ la curva de parametrización
$$\vec{X} = (t^2, 0, 1+t), \quad t \in \mathbb{R}.$$
  1. Encuentre los puntos donde se intersecan Σ y Γ.
  2. Para cada punto P hallado en el ítem 1, encuentre el plano tangente a Σ en P.
- **Ejercicio 2.** Sea $f(x,y) = 3x^2 + 6xy + 2y^3$. Halle los puntos críticos de f y clasifíquelos.
- **Ejercicio 3.** Pruebe que la ecuación
$$2xy - \cos(x)z + yz^2 = 0$$
define implícitamente una función $z = f(x,y)$ de clase $\mathcal{C}^1$ en un entorno de $(x_0, y_0) = (0,1)$ tal que $f(0,1) = 1$. Halle los versores en los cuales la derivada direccional de f en $(0,1)$ se anula.
- **Ejercicio 4.** Sea $g(x,y) = f(ye^x, x+2y)$ con $f(r,s)$ un campo escalar de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Se sabe que $L(r,s) = 1 + 2r - 3s$ es la aproximación lineal de f en $(1,2)$. Halle el plano tangente y la recta normal al gráfico de g en el punto $(0,1,g(0,1))$.
- **Ejercicio 5.** Dada la función
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(3xy)}{x^2+2y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases},$$
estudie la continuidad f en $(0,0)$ y la existencia de $f'_x(0,0)$ y $f'_y(0,0)$.

- **Ejercicio 1.** Sean Σ la superficie de ecuación $x^2y + xz - e^y + z^2 = 0$ y Γ la curva de parametrización
$$\vec{X} = (t^2, 0, 1+t), \quad t \in \mathbb{R}.$$
  1. Encuentre los puntos donde se intersecan Σ y Γ.
  2. Para cada punto P hallado en el ítem 1, encuentre el plano tangente a Σ en P.

• Datos

$\vec{X}(t) = (t^2, 0, 1+t)$, $\Sigma: x^2y + xz - e^y + z^2 = 0$

ⓐ Hallar puntos $\vec{x} \cap \Sigma$

↳ Hallar valores t_0 donde $\vec{x}(t_0) \cap \Sigma$

$$\Sigma \cap \vec{x}(t_0) \Rightarrow [(t_0)^2]^2 \cdot 0 + t_0^2 \cdot (1+t_0) - e^0 + (1+t_0)^2 = 0$$
$$t_0^2(1+t_0) - 1 + (1+t_0)(1+t_0) = 0$$
$$(1+t_0)[t_0^2 + (1+t_0)] - 1 = 0$$
$$\underbrace{t_0^3 + t_0^2 + t_0 + t_0 + t_0^2 + 1 = 1}_{t_0^3 + 2t_0^2 + 2t_0 = 0}$$

$$t_0(t_0^2 + 2t_0 + 2) = 0$$
$$\underline{t_0 = 0} \quad \vee \quad t_1, t_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(2)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \phi$$

ⓑ Ver plano tg a Σ en $\vec{x}(-1)$ y $\vec{x}(0)$ ver si define $z = f(x,y)$ en $F(x,y,z)$ en $\vec{x}(0)$

$F(x,y,z) = x^2y + xz - e^y + z^2 =$

↳ ver teorema en $\vec{x}(0)$

$$F \begin{cases} x \\ y \\ z = f(x,y) \end{cases} \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \left. \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \right|_{(0,0,1)} = \frac{-1}{2}$$

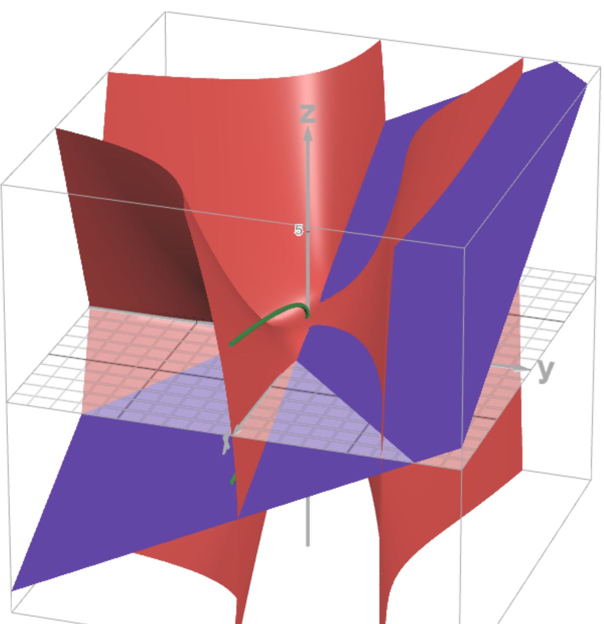
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \left. \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \right|_{(0,0,1)} = \frac{1}{2}$$

Ⓘ $F(\vec{x}(0)) = F(0,0,1) = 0^2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - e^0 + 1^2 = 0$

Ⓘⓘ $\nabla F(x,y,z) = (2xy + z,\ x^2 - e^y,\ x + 2z) \rightarrow$ como $\nabla F(x,y,z)$ continua, F es C^1 en $\vec{x}(0)$

Ⓘⓘⓘ $\frac{\partial F}{\partial z}(0,0,1) = 0 + 2 \neq 0 \rightarrow$ está definida $z = f(x,y)$ en un entorno $(x_0, y_0) \in E(0,0)$

↳ plano tg $z = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\, y = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$ plano tg a Σ en $\vec{x}(0)$



- **Ejercicio 2.** Sea $f(x,y) = 3x^2 + 6xy + 2y^3$. Halle los puntos críticos de f y clasifíquelos.

• Hallar $\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x + 6y$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6x + 6y^2$

• Hallar puntos críticos $\nabla f(P) = 0$

$$\nabla f(x,y) \begin{cases} 6x + 6y = 0 \rightarrow y = -x \\ 6x + 6y^2 = 0 \rightarrow 6x + 6(-x)^2 = 0 \rightarrow 6x + 6x^2 = 6x(1+x) = 0 \end{cases} \quad \underbrace{x=0}_{(0,0)} \vee \underbrace{x=-1}_{(-1,1)} \rightarrow \text{puntos críticos}$$

• Hallar H_f

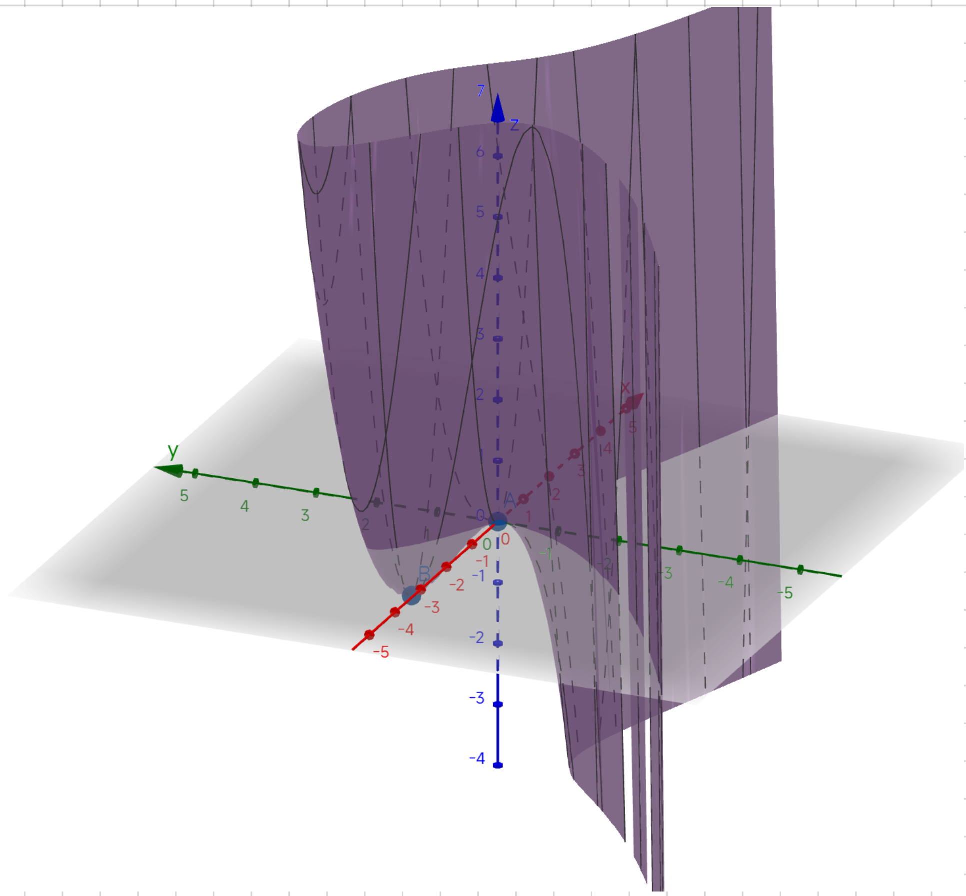
$$H_f(x,y) = \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 12y \end{vmatrix}$$

• clasificar puntos críticos

$$H_f(0,0) = \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \qquad H_f(-1,1) = \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix}$$

Como $\det(H_f(0,0)) = -36 < 0$ no es un extremo

Como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,1) = 6 > 0$ y $\det(H_f(-1,1)) = 36 > 0$ $(-1,1)$ es un mínimo



- **Ejercicio 3.** Pruebe que la ecuación

$$2xy - \cos(x)z + yz^2 = 0$$

define implícitamente una función $z = f(x, y)$ de clase $\mathcal{C}^1$ en un entorno de $(x_0, y_0) = (0, 1)$ tal que $f(0, 1) = 1$. Halle los versores en los cuales la derivada direccional de f en $(0, 1)$ se anula.

↳ probar ec define $z = f(0,1) = 1$ → que la ecuación define $\sup$ implícita en entorno de $P = (0,1,1)$

↳ $F(x,y,z) = 2xy - \cos(x)z + yz^2$

→ Ver teorema de función Implícita en $P = (0,1,1)$ para $F(x,y,z)$

I $F(0,1,1) = 2.0.1 - \cos(0)1 + 1 = 0$

II $\nabla F(x,y,z) = \left(2y + \operatorname{sen}(x).z,\ 2x + z^2,\ -\cos(x) + 2yz\right)$ ∇F es continua en $E(0,1,1)$ → $F \in C^1$ en $E(0,1,1)$

III $\frac{\partial F}{\partial z}(0,1,1) = -\cos(0) + 2 = 1 \neq 0$ → existe $z = f(x,y)$ definido en $(x_0, y_0) = (0,1)$

donde $z = f(0,1) = 1$

→ Versores que anulan derivada direccional de f en $(0,1)$

$$\frac{\partial f}{\partial \check{r}}(0,1) = \nabla f(0,1) \cdot \check{r} = \nabla f(0,1)(a,b) = 0$$

→ Hallar $\nabla f(0,1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,1), \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)\right)$ → $\nabla f(0,1) = (-2, -1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \left.\frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right|_{(0,1,1)} = \frac{-2}{1} = -2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \left.\frac{-\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)}\right|_{(0,1,1)} = \frac{-1}{1} = -1$$

→ Hallar $\check{r} = (a,b)$ donde $\nabla f(0,1) \cdot \check{r} = 0$, $\underbrace{a^2 + b^2 = 1}$ → $\check{r}$ tiene que ser versor

$$\nabla f(0,1).(a,b) = (-2,-1)(a,b) = 0$$

$$-2a - b = 0 \rightarrow \boxed{b = -2a} \rightarrow a^2 + 4a^2 = 1$$

$$5a^2 = 1 \rightarrow a^2 = \frac{1}{5}$$

$$\underbrace{a = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}} \quad \vee \quad \underbrace{a = \frac{-1}{\sqrt{5}} = \frac{-\sqrt{5}}{5}}$$

$$\check{r}_1 = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \qquad \check{r}_2 = \left(\frac{-\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

- **Ejercicio 4.** Sea $g(x,y) = f(ye^x, x+2y)$ con $f(r,s)$ un campo escalar de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Se sabe que $L(r,s) = 1 + 2r - 3s$ es la aproximación lineal de f en $(1,2)$. Halle el plano tangente y la recta normal al gráfico de g en el punto $(0, 1, g(0,1))$.

∘ Datos

$g = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$g(x,y) = f \circ h(x,y)$ $\quad h(x,y) = (ye^x, x+2y)$ $\quad f(r,s) \in C^1$ y $L_f(r,s) = 1 + 2r - 3s$ en $h(0,1) = (1,2)$

$G(x,y) = (x, y, g(x,y))$

$\hookrightarrow L(1,2) = f(1,2) = -3$

$\hookrightarrow \nabla L(1,2) = \nabla f(1,2) = (2,-3)$

⇛ Hallar tg $G(0,1) = (0, 1, g(0,1))$

$L_g(x,y) = g(0,1) + \underbrace{\nabla g(0,1)}_{\text{Hallar } \nabla g(0,1) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(0,1) \quad \frac{\partial g}{\partial y}(0,1)\right)} (x, y-1)$

⇛ Hallar $\nabla g(0,1)$

$\nabla g = Dg = D_f \cdot D_h$

$Dg(0,1) = D_f(h(0,1)) \cdot D_h(0,1)$ (*)

$Dg(0,1) = (2 \ \ -3) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (-1 \ \ -4)$

⇛ Hallar D_h ⇛ $h(x,y) = (ye^x, x+2y)$

$D_h = \begin{pmatrix} ye^x & e^x \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad D_h(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

⇛ Hallar $D_f(h(0,1)) = D_f(1,2)$

$\hookrightarrow h(0,1) = (1,2)$

$\hookrightarrow$ Si $L_f(r,s)$ es aproximación lineal de f en $h(0,1) = (1,2)$

entonces $\underbrace{D L_f(0,1) = D_f(0,1)}_{\nabla L_f(0,1) = \nabla f(0,1)}$

→ Hallar $\nabla L(1,2)$ $\qquad \nabla L(1,2) = \nabla f(1,2) = (2,-3)$

$\frac{\partial L}{\partial x}(1,2) = 2 \Big|_{(1,2)} = 2 \qquad \frac{\partial L}{\partial s}(1,2) = -3 \Big|_{(1,2)} = -3$

⇛ Hallar plano tg a $G(0,1) = (0, 1, g(0,1))$

$L_g(x,y) = g(0,1) + \nabla g(0,1)(x, y-1)$

$= f(h(0,1)) + \nabla g(0,1)(x, y-1)$

$z = L_g(x,y) = -3 + (-1,-4)(x, y-1) = -x - 4y + 1$

recta normal

$\lambda(-1,-4,-1) + (0,1,-3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

- **Ejercicio 5.** Dada la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\operatorname{sen}(3xy)}{x^2+2y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases},$$

estudie la continuidad f en $(0,0)$ y la existencia de $f'_x(0,0)$ y $f'_y(0,0)$.

→ Estudiar continuidad en (0,0)

→ $f(0,0)=0$

→ $\lim_{x,y\to 0,0} \frac{\operatorname{sen}(3xy)}{x^2+2y^2}$

probar con recta $x=y$

$\lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3y^2)}{y^2+2y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3y^2)}{3y^2} \overset{L'H}{=} \lim_{y\to 0}\frac{\cos(3y^2)6y}{6y} = \lim_{y\to 0}\cos(3y^2)=1$

probar con hip. $x=y^2$

$\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3y^3)}{y^4+2y^2} \overset{L'H}{=} \lim_{y\to 0}\frac{9y^2\cos(3y^3)}{4y^3+4y} = \lim_{y\to 0}\frac{9y\cos(3y^3)}{4y^2+4} \overset{L'H}{=} \lim_{y\to 0}\frac{9\cos(3y^3)-9y\operatorname{sen}(3y^3)9y^2}{8y}$

$=\lim_{y\to 0} \frac{-9\operatorname{sen}(3y^3)9y^2-[81y^3\cos(3y^3)3y2+243y^2\operatorname{sen}(3y^3)]}{8}=0$

rehacer

probar $x=my$

$\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3y^2 m)}{y^2m^2+2y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3y^2m)}{y^2(m^2+2)} \overset{L'H}{=} \lim_{y\to 0}\frac{\cos(3y^2m)6my}{2y(m^2+2)} = \lim_{y\to 0}\frac{\cos(3y^2m)3m}{m^2+2}=\frac{3m}{m^2+2}$

dependiendo distinto valor de m, se obtienen distintos límites

→ no existe lím (0,0)

→ f no es continua

Hallar $f_x'(0,0)$ e $f_y'(0,0)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f((0,0)+h(1,0))-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{\operatorname{sen}(3\cdot 0\cdot h)}{h^2}=0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f((0,0)+h(0,1))-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{\operatorname{sen}(3\cdot 0\cdot h)}{2h^2}=0$

$f'_x(0,0)=0 \quad f'_y(0,0)=0$