9/5/2025

Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas. No se aceptarán cálculos dispersos, poco claros o sin comentarios.

La evaluación se aprueba con 3 (tres) ejercicios bien resueltos.

Tema 1

- **Ejercicio 1.** Sea $h(x,y) = f(x-y, x+y, xy)$ con $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$. Se sabe que el plano de ecuación $2x + z = 1$ es tangente al gráfico de h en $P = (1, 1, h(1,1))$ y que la segunda componente de $\nabla f(0,2,1)$ es 2. Halle la dirección en la cual la derivada direccional de f en $(0,2,1)$ alcanza su máximo valor e indique cuánto vale este máximo.

- **Ejercicio 2.** Sea
$$f(x,y) = ae^{ax} - xy + b\,\mathrm{sen}(y) - x + y + y^2.$$
Halle todos los valores de las constantes a y b para los cuales f alcanza un extremo relativo en el origen. Clasifique el tipo de extremo para los valores de a y b obtenidos.

- **Ejercicio 3.** Sea
$$f(x,y) = \frac{\sqrt{4x^2 - 8x + y^2}}{\sqrt[4]{9 - x^2 - y^2}}.$$
Sea D el dominio natural de f. Grafique D, el interior de D y su frontera ∂D. Describa el conjunto $\partial D \cap D$ mediante ecuaciones.

- **Ejercicio 4.** Prueba que la ecuación
$$x^2 y + xz - e^y = 1$$
define implítamente una función $x = g(y,z)$ de clase $\mathcal{C}^1$ en un entorno del punto $(y_0, z_0) = (0,1)$. Calcule $g(0.05, 0.97)$ mediante una aproximación lineal.

- **Ejercicio 5.** Sea Σ la superficie de ecuación
$$\vec{X} = \left(u + v, \frac{v^2}{2}, \frac{u^2}{2}\right), \quad u > 0, v > 0.$$
Halle todos los $P \in \Sigma$ para los cuales el plano tangente a Σ en P es paralelo al plano tangente a la superficie Σ^* de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ en el punto $A = (-1, 1, 1)$. Para cada uno de lo P hallados, encuentre una ecuación paramétrica del plano tangente a Σ en ese punto.

- **Ejercicio 1.** Sea $h(x,y) = f(x-y, x+y, xy)$ con $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$. Se sabe que el plano de ecuación $2x + z = 1$ es tangente al gráfico de h en $P = (1,1,h(1,1))$ y que la segunda componente de $\nabla f(0,2,1)$ es 2. Halle la dirección en la cual la derivada direccional de f en $(0,2,1)$ alcanza su máximo valor e indique cuánto vale este máximo.

° Datos

$g(x,y) = (x-y,\ x+y,\ xy)$ $\quad f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ / \ h = f(g(x,y))$

plano tg a h en $P = (1,1,h(1,1))$

$L_h(x,y) = 1 - 2x$

$L_h(1,1) = h(1,1) = -1$

$\nabla L_h(1,1) = \nabla h(1,1) = (-2, 0)$

$\nabla f(0,2,1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \quad 2 \quad \frac{\partial f}{\partial z} \right)$

$\Rightarrow$ Para hallar derivada direccional máxima de f en $(0,2,1)$ podemos utilizar la dirección de $\nabla f(0,2,1)$

↳ sabemos que $\nabla f(0,2,1) = (f_x' \quad 2 \quad f_z')$ y que $\nabla h(1,1) = \nabla f(g(1,1)) \cdot D_g(1,1)$, $g(1,1) = (0,2,1)$

$$\nabla h(1,1) = \nabla f(0,2,1) \cdot \underbrace{D_g(1,1)}_{\text{última incógnita}}$$

$\Rightarrow$ Hallar $D_g(1,1)$

$$D_g(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix} \to D_g(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

reemplazar

$$(-2,0) = \left(f_x'(0,2,1) \quad 2 \quad f_z'(0,2,1) \right) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

↳ Hallar $f_x'(0,2,1)$ y $f_z'(0,2,1)$

$$\begin{cases} f_x' + 2 + f_z' = -2 \\ -f_x' + 2 + f_z' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_x' + f_z' = -4 \\ -f_x' + f_z' = -2 \end{cases} \Big\} ec_2 = ec_2 + ec_1 \to \begin{cases} f_x' + f_z' = -4 \to \boxed{f_x' = -1} \\ 2f_z' = -6 \to \boxed{f_z' = -3} \end{cases}$$

$$↳ \underbrace{\nabla f(0,2,1) = (-1,\ 2,\ -3)}_{\text{dirección de derivada direccional máxima}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \breve{r}}(0,2,1) = \nabla f(0,2,1) \cdot \breve{r} = \|\nabla f(0,2,1)\| \cdot \overset{1}{\|\breve{r}\|}\ \overset{1}{\cos(\alpha)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \breve{r}_{max}} = \|\nabla f(0,2,1)\| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$$

$$\nabla f(0,2,1) \cdot \frac{\nabla f(0,2,1)}{\|\nabla f(0,2,1)\|} = (-1, 2, -3) \cdot \frac{(-1,2,-3)}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$$

- **Ejercicio 2.** Sea

$$f(x,y) = ae^{ax} - xy + b\,\mathrm{sen}(y) - x + y + y^2.$$

Halle todos los valores de las constantes a y b para los cuales f alcanza un extremo relativo en el origen. Clasifique el tipo de extremo para los valores de a y b obtenidos.

↳ Hallar a y b para que (0,0) sea extremo relativo

↳ $\nabla f(0,0) = 0 \rightarrow$ (0,0) tiene que ser pto crítico

↳ $\det |H_f(0,0)| > 0 \rightarrow$ para que sea extremo
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0 \rightarrow$ min
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) < 0 \rightarrow$ max

$\Rightarrow$ Hallar $\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = a^2 e^{ax} - y - 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x + b\cos(y) + 1 + 2y$

$\Rightarrow \nabla f(x,y) = \vec{0}$ $\qquad \nabla f(0,0) = \vec{0}$

$$\begin{cases} a^2 e^{ax} - y - 1 = 0 \\ -x + b\cos(y) - 1 + 2y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 . e^0 - 0 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a^2 = 1} \rightarrow \boxed{a = 1} \vee \boxed{a = -1} \\ -0 + b\cos(0) - 1 + 2.0 = 0 \Rightarrow \boxed{b = 1} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Hallar $H_f(0,0)$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} a^3 e^{ax} & -1 \\ -1 & -b\,\mathrm{sen}(y) + 2 \end{pmatrix} \qquad H_f(0,0) = \begin{pmatrix} a^3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det(H_f(0,0)) = 2a^3 - 1 > 0$

$a^3 > \frac{1}{2}$

$\underbrace{a > \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}}$

para que sea extremo $a = 1$ y $b = 1$

↳ $\det |H_f(0,0)| > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = a^3 > 0$

es un mínimo local

- **Ejercicio 3.** Sea

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{4x^2 - 8x + y^2}}{\sqrt[4]{9 - x^2 - y^2}}.$$

Sea D el dominio natural de f. Grafique D, el interior de D y su frontera ∂D. Describa el conjunto $\partial D \cap D$ mediante ecuaciones.

$\Rightarrow$ Hallar domino D

$$f(x,y) = \frac{P(x,y) = \sqrt{4x^2 - 8x + y^2}}{Q(x,y) = \sqrt[4]{9 - x^2 - y^2}} \quad \Big\} \quad \text{Dom} f = \text{Dom } P \cap \text{Dom } Q$$

Hallar dom P

$4x^2 - 8x + y^2 \geq 0$

$4(x^2 - 2.1.x + 1 - 1) + y^2 \geq 0$

$4[(x-1)^2 - 1] + y^2 \geq 0$

$4(x-1)^2 + y^2 \geq 4 \longrightarrow \boxed{(x-1)^2 + \frac{y^2}{4} \geq 1}$

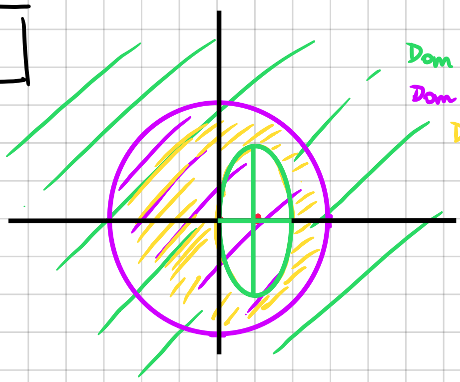
$\hookrightarrow$ elipse
$C = (1,0)$
$a = 1$
$b = 2$

Hallar Dom Q y $Q(x,y) \neq 0$

$9 - x^2 - y^2 > 0$

$\boxed{x^2 + y^2 < 9}$

$\hookrightarrow$ circulo $C = (0,0)$, $R = 3$



Dom $P(x,y)$
Dom $Q(x,y)$
Dom$f$ = Dom $P(x,y)$ $\cap$ Dom $Q(x,y)$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x-1)^2 + \frac{y^2}{4} > 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 9\}$

Interior $= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x-1)^2 + \frac{y^2}{4} > 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 9\}$

∂D Frontera $= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x-1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 9\}$

$D \cap \partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x-1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1\}$

- **Ejercicio 4.** Prueba que la ecuación

$$x^2y + xz - e^y = 1$$

define implítamente una función $x = g(y,z)$ de clase $\mathcal{C}^1$ en un entorno del punto $(y_0, z_0) = (0,1)$. Calcule $g(0.05, 0.97)$ mediante una aproximación lineal.

$G(x,y,z) = x^2y + xz - e^y - 1$

- Ver teorema función implícita G en $(x_0, 0, 1)$

(I) $G(x_0, 0, 1) = x_0^2 \cdot 0 + x_0 - e^0 - 1 = 0 \rightarrow \boxed{x_0 = 2}$ con $x_0 = 2$ $G(x_0, 0, 1)$ se anula

(II) G es función polinómica y exponencial, clase C^1 $(\mathbb{R}^3)$ como $(x_0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$, G es C^1 en $(x_0, 0, 1)$

(III) $\frac{\partial G}{\partial x}(x_0, 0, 1) = 2xy + z \Big|_{(2,0,1)} = 1 \neq 0$ → queda definido $x = f(y,z)$ en un entorno $(y_0 z_0) \in E(0,1)$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,1) = \frac{-\frac{\partial G}{\partial y}}{\frac{\partial G}{\partial x}} \Bigg|_{(2,0,1)} = \frac{x^2 - e^y}{1} \Bigg|_{(2,0,1)} = 3$$

$$\frac{\partial g}{\partial z}(0,1) = \frac{-\frac{\partial G}{\partial z}}{\frac{\partial G}{\partial x}} \Bigg|_{(2,0,1)} = \frac{x}{1} \Bigg|_{(2,0,1)} = 2$$

aproximación lineal g en $(0,1)$

$$L_g(x,y) = g(0,1) + \frac{\partial g}{\partial y}(0,1) \cdot y + \frac{\partial g}{\partial z}(0,1)(z-1)$$

$$L_g(x,y) = 2 + 3y + 2z - 2 = 3y + 2z$$

$$g(0.05, 0.97) \cong L(0.05, 0.97)$$

$$g(0.05, 0.97) \cong 2.09$$

- **Ejercicio 5.** Sea Σ la superficie de ecuación

$$\vec{X} = \left(u+v, \frac{v^2}{2}, \frac{u^2}{2}\right), \quad u>0, v>0.$$

Halle todos los $P \in \Sigma$ para los cuales el plano tangente a Σ en P es paralelo al plano tangente a la superficie Σ^* de ecuación $x^2+y^2+z^2=3$ en el punto $A=(-1,1,1)$. Para cada uno de lo P hallados, encuentre una ecuación paramétrica del plano tangente a Σ en ese punto.

↳ Para que Σ tenga plano tg paralelo en Σ^*, quiere decir que los planos tienen misma normal

↳ Pasos: hallar normal de sup Σ^* en A, hallar puntos $P \in \Sigma$ con $\vec{N} = \vec{N}_{\Sigma^*}(A)$, hallar ec paramétrica plano tg

⇒ Hallar normal a Σ^* en A

↓

función implícita $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-3=0$ en A

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\Bigg|_{(-1,1,1)} = \frac{-2x}{2z}\Bigg|_{(-1,1,1)} = 1$$

(I) $F(A) = 1+1+1-3=0$

(II) F polinómica clase C^1 en $\mathbb{R}^3$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-1,1) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\Bigg|_{(-1,1,1)} = -\frac{2y}{2z}\Bigg|_{(-1,1,1)} = -1$$

(III) $\frac{\partial F}{\partial z}(A) = 2z\Big|_{(-1,1,1)} = 2 \neq 0 \to$ quede def $z=f(x,y)$ en $(x_0,y_0) \in E(-1,1)$

tg a sup $z=f(x,y)$

$$z = f(-1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(-1,1)(x+1) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-1)$$

$$\vec{N}_* = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1), -1\right) \longrightarrow \boxed{\vec{N}_* = (1,-1,-1)}$$

⇒ Hallar $\vec{x}(u,v)$ $(u,v>0)$ donde $\vec{N}(u,v) = \lambda(1,-1,-1)$ un múltiplo de este

$$\vec{N}(u,v) = \frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & u \\ 1 & v & 0 \end{vmatrix} = (-uv, u, v)$$

$$\begin{cases} -uv = \lambda \\ u = -\lambda \\ v = -\lambda \end{cases} \to \underbrace{\lambda=-1}_{u>0 \text{ y } v>0} \quad \begin{cases} -uv = -1 \\ u = 1 \\ v = 1 \end{cases}$$

$$P = \vec{X}(1,1) = \left(1+1, \frac{1^2}{2}, \frac{1^2}{2}\right) = (2, 0.5, 0.5)$$

→ Hallar tangente

$$(-1,1,1)\left[(x,y,z) - \left(2,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right] = 0$$

$$-x+y+z+1=0$$

↓

$$\boxed{z = x-y-1}$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = (1,0,1)$$

$$\frac{\partial X}{\partial u} = (1,0,1)$$

$$r(s,t) = s\cdot\frac{\partial X}{\partial u}(1,1) + t\cdot\frac{\partial X}{\partial v}(1,1) + P$$

$$= s(1,0,1) + t(1,0,1) + (2, 0.5, 0.5)$$