

Nombre y Apellido: Ian Chen

Número de Padrón: 113249

Curso: 03 - Gígola

Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas. No se aceptarán cálculos dispersos, poco claros o sin comentarios.

La evaluación se aprueba con 3 (tres) ejercicios bien resueltos.

Tema 2

- Ejercicio 1. Sea D el dominio de

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{2y - y^2 - x^2}}{\sqrt{y - x}}.$$

- B a) Grafique separadamente D , su frontera y su interior.
 b) Grafique el conjunto de nivel 0. Indique cuáles de los siguientes puntos pertenecen a ese conjunto: $(1, 1)$, $(0, 2)$, $(0, 0)$.

- B ▪ Ejercicio 2. Halle los puntos críticos de $f(x, y) = y^3 - \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{2}x$ y clasifíquelos.

- Ejercicio 3. Pruebe que la ecuación

$$\sin(y) + x^2z^3 - e^yz + y + 2x = 2$$

B *Falte justificación*
 define implícitamente una función $z = f(x, y)$ de clase C^1 en un entorno de $(x_0, y_0) = (1, 0)$ tal que $z_0 = f(x_0, y_0) > 0$. Halle todos los versores $\tilde{v}$ para los cuales $f'((1, 0), \tilde{v}) = 0$.

- Ejercicio 4. Sea $g(x, y) = f(xy, x^2 + y^2)$ con $f(r, s)$ de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $P(r, s) = 1 - r + s$ es su polinomio de Taylor de orden 1 en $(-1, 2)$. Sea $h(t) = g \circ \tilde{\alpha}(t)$, con $\tilde{\alpha}(t) = (-\cos(t), e^t)$, $t \in \mathbb{R}$.

- B *Falte justificación*
 a) Calcule $\nabla g(-1, 1)$

- B b) Calcule aproximadamente $h(-0.05)$ mediante una aproximación lineal.

- Ejercicio 5. Sean Σ_1 la superficie de ecuación vectorial

$$\vec{X} = (u + v, u^2, v - u), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

B y $\Sigma_2 : x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Sea Π el plano tangente a Σ_1 en $A = (0, 1, 2)$. Halle los puntos $P \in \Sigma_2$ para los cuales el plano tangente a Σ_2 en P es paralelo a Π .

10/5/2025

Parcial 1 - Análisis matemático II

* Ejercicio 1. $f(x,y) = \frac{\sqrt{2y - y^2 - x^2}}{\sqrt{y-x}}$

(a) ~~Hallar~~ Graficar Dom f, su frontera e interior

↳ f es una división de funciones. $f(x,y) = \frac{p(x,y)}{a(x,y)}$

para hallar dom.f = es la intersección $\left[\begin{array}{l} \text{Dom } p(x,y) \cap \text{Dom } a(x,y) \\ \text{donde } a(x,y) \neq 0 \end{array} \right.$

↳ Hay que restringir valores (x,y) por raíz.

↳ puntos que cumplen ambos.

⇒ Hallar Dom $p(x,y) = \sqrt{2y - y^2 - x^2}$

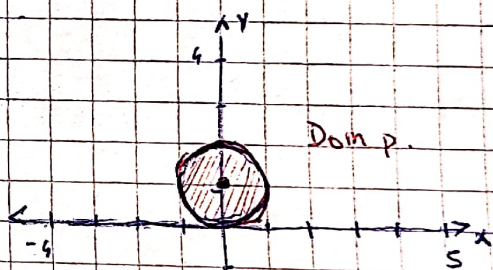
$$2y - y^2 - x^2 \geq 0$$

$$x^2 + y^2 - 2y \leq 0$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 - 1 \leq 0$$

$$x^2 + (y-1)^2 \leq 1$$

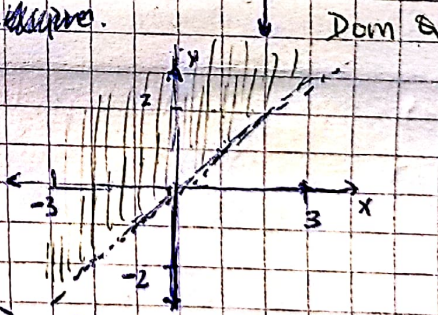
→ C = (0,1)
para graficar simplemente
una circunferencia.



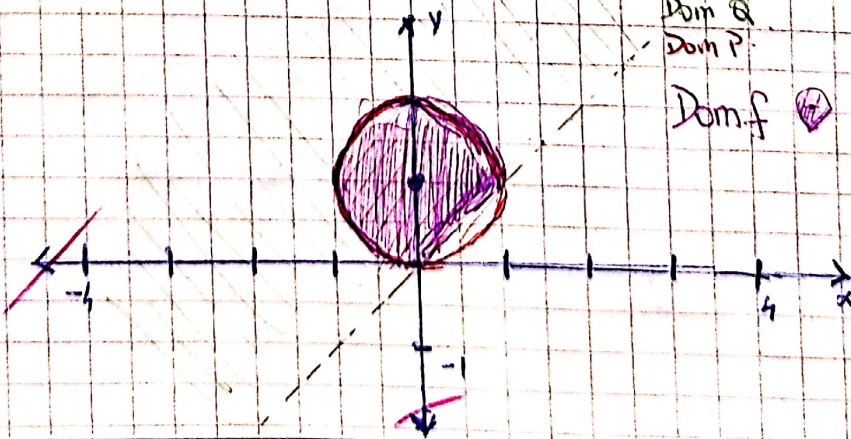
⇒ Hallar Dom $a(x,y) = \sqrt{y-x}$

$$y-x > 0$$

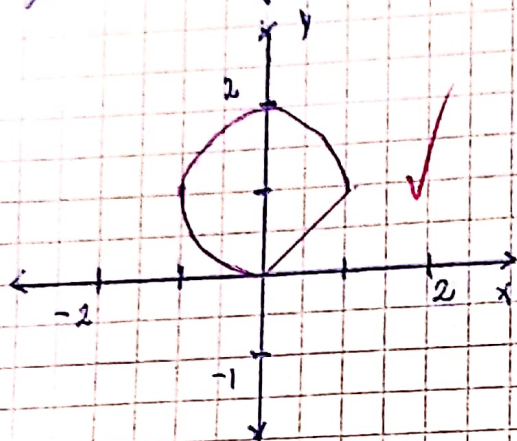
$$y > x$$



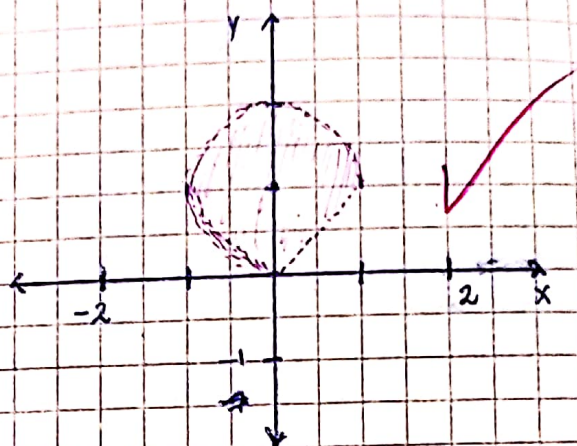
⇒ ~~Hallar~~ Gráfico Dom f = Dom p. ∩ Dom a



⇒ Gráfico frontera f.



⇒ Gráfico interior f.



(b) Gráfico conjunto Nivel 0.

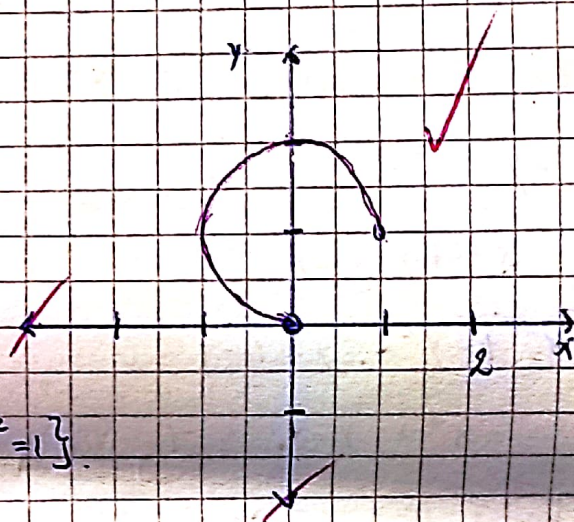
↳ Hallar conjunto nivel 0 N_0 .

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{2y - y^2 - x^2}}{\sqrt{y - x}} = 0$$

$$2y - y^2 - x^2 = 0$$

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

$$N_0 = \{(x, y) \in \text{Dom } f \mid x^2 + (y - 1)^2 = 1\}$$



$$A = (1, 1)$$

$$B = (0, 2)$$

$$C = (0, 0)$$

A no pertenece a Dom f ya que ~~no pertenece~~ anula denominador

C no pertenece a Dom f porque anula denominador

A no pertenece a Dom f. y B? $B \in \text{Dom } f$

ninguno de los 3 puntos pertenece. Dom f

* Ejercicio 2. $f(x,y) = y^3 - \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{2}x$

↳ para hallar puntos críticos (x_0, y_0)

tienen que cumplir $\nabla f(x_0, y_0) = 0$

$f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$

↳ y para verificación hay que ver con $H_f(x_0, y_0)$.

⇒ Hallar $\nabla f(x,y) = \left(\frac{df}{dx}(x,y) \quad \frac{df}{dy}(x,y) \right)$

$\frac{df}{dx}(x,y) = -\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}$

$\frac{df}{dy}(x,y) = 3y^2 - \frac{1}{2}x \cdot 2y = 3y^2 - xy$

⇒ Hallar puntos críticos $\rightarrow (x_0, y_0) / \nabla f(x_0, y_0) = 0$

$\nabla f(x,y) \begin{cases} -\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2} = 0 \\ 3y^2 - xy = 0 \end{cases}$

~~$y^2 = 1$~~
 ~~$3y^2 - xy = 0$~~
 ~~$3y = x$~~

$y^2 = 1 \rightarrow y = 1 \vee y = -1$

$y(3y - x) = 0 \rightarrow y = 0 \vee 3y - x = 0$

no anda $\frac{df}{dx}$

$x = 3y$

⇒ $y = 1 \wedge x = 3y \rightarrow P_1 = (3, 1)$

⇒ $y = -1 \wedge x = 3y \rightarrow P_2 = (-3, -1)$

~~⇒ $y = 0 \wedge x = 3y \rightarrow P_3 = (0, 0)$ no anda $\frac{df}{dx}$~~

Se hallaron dos puntos críticos P_1 y $P_2 \rightarrow P_1 = (3, 1) \quad P_2 = (-3, -1)$

⇒ Hallar $H_f(x,y)$

$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \cdot 2y \\ -y & 6y - x \end{pmatrix}$

$H_f(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$H_f(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

Como $\det(H_f(P_1)) = -1 < 0$ entonces P_1 no es extremo (punto silla)

Como $\det(H_f(P_2)) = -1 < 0$ entonces P_2 no es extremo (punto silla)

* Ejercicio 3 $\sin(y) + x^2 z^3 - e^y z + y + 2x = 2$

⇒ Dato → Hallar / Demostrar $z = f(x, y)$, en $(x_0, y_0) \in E(1, 0)$

$y \ z_0 = f(x_0, y_0) > 0$

probar teorema func. implícita en $F(x, y, z) = \sin(y) + x^2 z^3 - e^y z + y + 2x - 2$
en punto. ~~$(1, 0, 1)$~~ $(1, 0, z_0)$

(I) $F(1, 0, z_0) = \sin(0) + z_0^3 - z_0 \cdot e^0 + 0 + 2 \cdot 1 - 2 = 0$

$= z_0^3 - z_0 = z_0 (z_0^2 - 1) = 0$

$= z_0 (z_0 + 1) (z_0 - 1) = 0$

$z_0 = 0 \quad \vee \quad z_0 = 1 \quad \vee \quad z_0 = -1$

$z_0 = 1 > 0 \rightarrow$ ~~posible~~ punto $(1, 0, 1)$ ✓

(II) F es de clase C^1 ya que es función polinómica y trigonométrica
en su dominio $\mathbb{R}^3 \rightarrow$ como $(1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ entonces $F \in C^1$ en $(1, 0, 1)$

(III) $\frac{\partial F}{\partial z}(1, 0, 1) = 3z^2 \cdot x^2 - e^y \Big|_{(1, 0, 1)} = 3 \cdot 1^2 \cdot 1^2 - e^0 = 2 \neq 0$

como $\frac{\partial F}{\partial z}(1, 0, 1) \neq 0$ entonces queda definida función
implícita $z = f(x, y)$ en un entorno $(x_0, y_0) \in E(1, 0)$
tal que $z_0 = f(0, 1) = 1 > 0$

$\nabla F(x, y, z) = (2z^3 x + 2, -ze^y + 1 + \cos(y), 3z^2 x^2 - e^y)$

$\nabla F(1, 0, 1) = \left(\frac{4}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1} \right)$

$\frac{\partial F}{\partial x}(1, 0, 1)$

$\frac{\partial F}{\partial y}(1, 0, 1)$

$\frac{\partial F}{\partial z}(1, 0, 1)$

sigue así

→ Hallar vectores $\vec{v} = (a, b)$ donde $\frac{df}{d\vec{v}}(1,0) = 0$

↓ la derivada direccional se puede calcular como producto escalar entre $\nabla f(1,0)$ y el vector $\vec{v}$ = *hacer punto*

$$\frac{df}{d\vec{v}}(1,0) = \nabla f(1,0) \cdot \vec{v} = \left(\frac{df}{dx}(1,0) \cdot \frac{df}{dy}(1,0) \right) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

→ Hallar $\nabla f(1,0)$.

$$\frac{df}{dx}(1,0) = \frac{\frac{dF}{dx}(1,0,1)}{\frac{dF}{dz}(1,0,1)} = \frac{-4}{2} = -2 \quad \frac{df}{dy}(1,0) = \frac{\frac{dF}{dy}(1,0,1)}{\frac{dF}{dz}(1,0,1)} = \frac{-1}{2}$$

$$\nabla f(1,0) = \left(-2, -\frac{1}{2} \right)$$

→ Hallar $\vec{v} = (a, b)$ para $\nabla f(1,0) \cdot \vec{v} = 0$ $(a^2 + b^2) = 1$ *por vector*

$$\nabla f(1,0) \cdot \vec{v} = \left(-2, -\frac{1}{2} \right) \cdot (a, b) = -2a - \frac{1}{2}b = 0$$

$$\begin{cases} -2a - \frac{1}{2}b = 0 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -4a \\ a^2 + (-4a)^2 = 1 \end{cases}$$

$$a^2 + 16a^2 = 1 \rightarrow a^2 = \frac{1}{17}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{17}} \quad , \quad a = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{17}} \wedge b = -4a \rightarrow \vec{v}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}} \right)$$

$$a = -\frac{1}{\sqrt{17}} \wedge b = -4a \rightarrow \vec{v}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}} \right)$$

Los vectores para $\frac{df}{d\vec{v}}(1,0) = 0$ son $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$

$$\varphi(x,y) = (xy, x^2 + y^2)$$

* Ejercicio. $g(x,y) = f(\varphi(x,y))$. $f(r,s) \in C^1(\mathbb{R}^2)$.
 polinom. Taylor. $P(r,s) = 1 - r + s$, ord. 1 en $(-1, 2)$. $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$h(t) = g \circ \bar{\alpha}(t) \quad / \quad \bar{\alpha}(t) = (-\cos(t), e^t) \quad \left\{ \begin{array}{l} g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \bar{\alpha}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \end{array} \right.$$

(a). Hallar $\nabla g(-1, 1)$.

Sabemos que. $\nabla g(-1, 1) = \nabla f(\varphi(-1, 1)) \cdot D\varphi(-1, 1)$

$$\nabla g(-1, 1) = \nabla f(\varphi(-1, 1)) \cdot D\varphi(-1, 1)$$

$\Rightarrow$ Hallar $\nabla \varphi(-1, 1) \Rightarrow \varphi(x,y) = (xy, x^2 + y^2)$

$$D\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 2y \end{pmatrix} \quad D\varphi(-1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Hallar $\nabla f(\varphi(-1, 1))$

$$\varphi(-1, 1) = (-1, 2)$$

Como $P(r,s)$ es polinom. Taylor de f en $(-1, 2)$.

entonces $\nabla P(-1, 2) = \nabla f(-1, 2)$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{\partial P}{\partial r} & \frac{\partial P}{\partial s} \end{pmatrix} = \nabla f(-1, 2)$$

• Hallar $\nabla g(-1, 1)$

$$\nabla g(-1, 1) = \nabla f(-1, 2) \cdot D\varphi(-1, 1)$$

$$\nabla g(-1, 1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\nabla g(-1, 1) = (-3, 3)} \quad \checkmark$$

Falte justificar el uso de la regla de la cadena.

lan Chen

Hoja 4

(b) Calcular $h(-0.05)$ mediante aprox lineal.

aprox lineal $L_h(\lambda) = h(0) + h'(0) \cdot \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$

la aprox. lineal es conveniente en $t=0$

como $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
su aprox lineal
tiene esta forma
en $t=0$

Hallar $h(0)$.

$$\vec{\alpha}(0) = (-1, 1)$$

$$h(0) = g(\vec{\alpha}(0)) = g(-\cos(0), e^0) = g(-1, 1)$$

$$\text{sabemos que } g(-1, 1) = f(g(-1, 1)) = f(-1, 2)$$

$$\text{sabemos que } f(-1, 2) = p(-1, 2) = 1 - (-1) + 2 = 4$$

$$h(0) = 4$$

Falta justificar

Hallar $h'(0)$.

$$Dh(0) = Dg(\vec{\alpha}(0)) \cdot D\vec{\alpha}(0)$$

$$\vec{\alpha}'(t) = (\sin(t), e^t)$$

$$h'(0) = g(-1, 1) \cdot \vec{\alpha}'(0)$$

$$h'(0) = (-3, 3) \cdot (\sin(0), e^0) = -3 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3$$

$$L_h(\lambda) = h(0) + \lambda h'(0)$$

$$L_h(\lambda) = 4 + \lambda 3$$

$$h(-0.05) \approx L_h(-0.05)$$

$$h(-0.05) \approx 4 + (-0.05) \cdot 3 = 3.85$$

$$h(-0.05) \approx 3.85$$

* Ejercicio 5: $\Sigma = \vec{x} \mid (\mu, \nu) = (\mu + \nu, \mu^2, \nu - \mu), (\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$
 $\Sigma_2 = x^2 + y^2 + z^2 = 3 \dots; A = (0, 1, 2)$

↳ Hallar ~~plano~~ π plano tp. en Σ , en A .

↳ Hallar ~~plano~~ $P \in \Sigma_2$ donde plano tp en $\Sigma_2(P)$ u paralelo a Σ .

↳ Pero = básicamente para que planos tp sean iguales, debe haber misma dirección de normal:

↳ Hallar normal en A en Σ , $\vec{N}_1$ *vectores propios*
 ↳ Hallar punto P en Σ que tengan misma normal $\vec{N}_1$ (misma dirección).

⇒ Hallar ~~normal~~ $N(\mu, \nu)$ normales a Σ .

$$N(\mu, \nu) = \frac{d\vec{x}}{d\mu} \times \frac{d\vec{x}}{d\nu} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2\mu & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2\mu, -2, -2\mu)$$

$$N(\mu, \nu) = (2\mu, -2, -2\mu)$$

Hallar (μ_0, ν_0) para $\vec{x}(\mu_0, \nu_0) = A$.

$$\begin{cases} \mu + \nu = 0 \\ \mu^2 = 1 \\ \nu - \mu = 2 \end{cases} \xrightarrow{e_3 \rightarrow e_3 + e_1} \begin{cases} \mu + \nu = 0 \\ \mu^2 = 1 \\ 2\nu = 2 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} \mu = -1 \\ \nu = 1 \end{matrix}} (\mu_0, \nu_0) = (-1, 1)$$

Hallar dirección de normal $\vec{N}_1$ en A .

$$\vec{N}_1(-1, 1) = (-2, -2, 2)$$

$$\pi: (-2, -2, 2) \cdot [x, y, z] - A = 0$$

↳ plano tp a Σ , en A

$$\Rightarrow \Sigma_2: x^2 + y^2 + z^2 = 3.$$

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$$

$F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
 es la misma superficie
 solo por un distinto
 lugar

recordando $\nabla F(x, y, z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) = (2x, 2y, 2z)$

de un punto
 tienen las
 mismas pendientes
 y curvaturas.

Se puede llamar Σ_2 con función $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0$

esta función El conjunto nivel 0 de esta función es Σ_2 .

De hecho cualquier conjunto nivel de esta función, es gráficamente un desplazamiento de la misma superficie Σ_2 por el espacio sin afectar a la pendiente, por lo que $\nabla F(x, y, z)$ sería el mismo para cualquier conjunto nivel.

$$\nabla F(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$$

ahora bien sabemos que $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es la normal a cualquier punto de la sup. $F(x_0, y_0, z_0)$. por lo que vamos a buscar lo que estamos buscando es hallar (x_0, y_0, z_0) en donde

$\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ sea un múltiplo de $(-2, -2, 2)$ para tener misma dirección:

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) = \lambda N_1 \rightarrow (2x, 2y, 2z) = \lambda (-2, -2, 2), \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} 2x = -2\lambda \\ 2y = -2\lambda \\ 2z = 2\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$(-\lambda, -\lambda, \lambda) = \lambda (-1, -1, 1)$$

Falta hallar la intersección de la recta con $F(x, y, z)$ para hallar los puntos deseados.

tomamos los puntos

$$F(-1, -1, 1) = (-1)^2 + (-1)^2 + (1)^2 = 3 = 3$$

el punto $(-1, -1, 1)$ pertenece a Σ_2
 tiene la misma pendiente y curvatura que Σ_2

$$\lambda = 1$$

$$\lambda = -1$$